



**Facultad
de
Ciencias**

Geometría hiperbólica, teselaciones de Farey y fracciones continuas

Hyperbolic Geometry, Farey tessellation and continued fractions

Trabajo de Fin de Grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autora: María Martín Vega

Directora: Nuria Corral Pérez

Junio - 2019

Agradecimientos

A Nuria, por haber aceptado ser mi directora en este trabajo y ayudarme siempre que lo he necesitado.

A mis compañeros del Doble Grado, por haber compartido esta experiencia de cinco años y por estar siempre, en los buenos y en los malos momentos. Al resto de compañeros y amigos de la facultad, porque con ellos los días son más divertidos.

Finalmente, quiero agradecer a mi familia y amigos por apoyarme en todo momento, desde el 22 de septiembre de 2014 hasta hoy.

Resumen

En este trabajo se introduce una aproximación geométrica a la expresión en fracciones continuas de un número real. Comenzaremos introduciendo algunas nociones básicas de geometría para aplicarlas después a la descripción del modelo del semiplano de Poincaré del plano hiperbólico. Es en el plano hiperbólico donde se construye la teselación de Farey, formada por triángulos ideales, es decir, que tienen como vértices puntos del infinito. También se explicará cómo se expresa un número real en fracciones continuas y se estudiará su relación con la teselación de Farey, mostrando finalmente un método gráfico para el cálculo de la expresión en fracciones continuas mediante el uso de geodésicas.

Palabras clave: Teselación de Farey, fracciones continuas, plano hiperbólico, semiplano de Poincaré, geometría, número real, número racional, transformaciones de Möbius.

Abstract

In this bachelor thesis, we introduce a geometric approximation of the expression of real numbers in continued fractions. Basic geometric ideas are first introduced so that they can be applied to the description of the Poincaré half-plane model of the hyperbolic plane. The Farey tessellation consists on a regular tiling of the hyperbolic plane made of ideal triangles, whose vertices lay on the points at infinity. We also explain how to express a number in continued fractions and its relation with the Farey tessellation, showing a graphical method to calculate this expression tracing geodesics.

Key words: Farey tessellation, continued fractions, hyperbolic plane, Poincaré Half-plane, geometry, real number, rational number, Möbius transformation.

Índice general

Introducción	1
1. Nociones básicas de geometría	3
1.1. Curvas regulares	4
1.2. Superficies	5
1.3. Primera forma fundamental	6
1.4. Curvas contenidas en superficies	7
1.5. Aplicaciones entre superficies	9
1.6. Métricas riemannianas	10
2. El árbol de Farey y las fracciones continuas	13
2.1. El árbol de Farey	13
2.2. Fracciones continuas	17
2.3. Fracciones continuas y árbol de Farey	21
3. Geometría hiperbólica	25
3.1. Postulados de la geometría de Euclides	25
3.2. Modelos del plano hiperbólico	26
3.2.1. Modelo proyectivo o de Beltrami	26
3.2.2. Modelo del hiperboloide	27
3.2.3. Modelo del disco de Poincaré	27
3.2.4. Modelo del semiplano de Poincaré	28
3.3. Aplicaciones $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$	32
4. Teselaciones de Farey	39
4.1. Teselaciones	39
4.2. Construcción de la teselación de Farey	39
4.3. Teselación de Farey y fracciones continuas	45
Bibliografía	53
Apéndice A. Grupos proyectivos	55
Apéndice B. Visión geométrica de las sucesiones de corte	57

Introducción

John Farey fue un geólogo inglés al cual se le atribuyen las sucesiones de números racionales de mismo nombre y la propiedad que estipula que dentro de cada sucesión se puede escribir cada elemento como el cociente de la suma de numeradores entre la suma de denominadores de los elementos anterior y posterior. Esto fue publicado en un artículo de *Philosophical Magazine* en 1816 y probado por el matemático Cauchy, si bien es cierto que existía un resultado similar, publicado por C. Haros 14 años antes. Aún así, el nombre de sucesiones de Farey perdura hasta el día de hoy. A partir de la sucesión de Farey se fueron desarrollando otros resultados, como por ejemplo el árbol de Stern-Brocot, descubierto de forma independiente por Moritz-Stern y Achille Brocot, con el que se construyen los números racionales. También, Lester R. Ford introdujo el empaquetamiento de círculos que lleva su mismo nombre “*Ford circle packing*” en el plano hiperbólico, publicado en 1938 en el artículo “*Fractions*” de la revista *The American Mathematician Monthly* (ver [11]). A partir del descubrimiento de los círculos de Ford, se obtiene la teselación de Farey.

A lo largo de esta memoria vamos a trabajar en el plano hiperbólico que es una geometría no euclidiana. Euclides (330a.C.-275a.C.) introdujo cinco postulados en geometría que se han utilizado durante miles de años. Aun así, la distinta naturaleza del quinto postulado con respecto a los otros cuatro ha llevado a pensar a muchos matemáticos que se puede deducir de los otros cuatro. Este postulado es “dada una recta y un punto exterior a esta, existe una única recta que pase por este punto y que no corte a la primera recta”. Fue C. F. Gauss quien se dio cuenta de que este postulado es independiente de los otros cuatro e introdujo las geometrías no euclidianas como aquellas que no cumplen este postulado. J. Bolyai demostró que la existencia de más de una recta que pase por un punto y que no corte a una recta dada implica que existen infinitas rectas con esta característica. Posteriormente N. I. Lobachevski introduce la geometría hiperbólica, aunque el primer modelo consistente fue propuesto por E. Beltrami. Después de éste, aparecen varios modelos del plano hiperbólico, de los cuales destacaremos en este trabajo el modelo del semiplano de Poincaré. (Ver [19] para una introducción histórica a la geometría hiperbólica).

En este trabajo se va a describir la teselación de Farey y se va a mostrar la curiosa relación que presenta con la expresión en fracciones continuas de un número, permitiéndonos dar un método gráfico para el cálculo de la expresión en fracciones continuas de un número utilizando geodésicas. Las fracciones continuas son una forma de presentar los números reales, tanto los racionales como los irracionales. Para los números racionales es fácil encontrar una fracción continua finita, mientras que para los irracionales existe un algoritmo que permite obtenerlos como límite de fracciones continuas finitas dando lugar a la noción de fracción continua infinita.

Se comenzará introduciendo algunas nociones sobre geometría diferencial con lo que se describirán varios modelos del plano hiperbólico. Aunque se muestren distintos modelos del plano hiperbólico, se trabajará con el modelo del semiplano de Poincaré \mathbb{H}^2 , en el que se calcularán las geodésicas y además se estudiará qué transformaciones de Möbius son isometrías de \mathbb{H}^2 , ya que desempeñarán un papel importante en la parte final del trabajo. Por otra parte se introducirá también la noción de pares de Farey y el árbol del mismo nombre, teniendo así todos los ingredientes necesarios para la construcción de la teselación de Farey. Finalmente, se mostrará el cálculo de las fracciones continuas de un número mediante el trazo de una geodésica orientada que parta desde la recta imaginaria hasta el número real, identificando los distintos tipos de corte de la geodésica con las teselas con los coeficientes de la expresión en fracciones continuas.

Capítulo 1

Nociones básicas de geometría

Para la realización de este trabajo vamos a introducir algunas nociones de geometría que posteriormente se van a utilizar. Hemos tomado como referencias las siguientes [9, 10, 17]. Nos apoyamos en la Geometría Diferencial que se caracteriza por el uso de técnicas heredadas del Cálculo Diferencial. A lo largo de este trabajo denotaremos a las funciones de clase C^∞ como diferenciables. La Geometría está estrechamente relacionada con la Topología, por eso vamos a introducir algunas nociones también. Seguiremos un desarrollo paralelo a [20, Cap.2].

Definición 1.1 Una **topología** τ sobre un conjunto X es una colección de subconjuntos de X que cumple:

- I $X, \emptyset \in \tau$.
- II $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ si $U_i \in \tau$ para todo $i \in I$.
- III $\bigcap_{j \in J} U_j \in \tau$ si $U_j \in \tau$ y J es una familia finita.

Se dice que X es un **espacio topológico** si está dotado de alguna topología τ y se denota como (X, τ) .

Una topología puede estar generada por un subconjunto de la misma, una base, es decir, todo abierto se puede escribir en función de los abiertos de una base.

Definición 1.2 Una **base** de una topología en X es una colección $\mathcal{B} \subset \tau$ que cumple las siguientes condiciones:

- I Para todo $x \in X$ existe un elemento $V_x \in \mathcal{B}$ con $x \in V_x$.
- II Dados dos elementos V_i, V_j con intersección no vacía, para todo $x \in V_i \cap V_j$, existe un elemento $V_k \in \mathcal{B}$ que cumple que $x \in V_k$ y $V_k \subset V_i \cap V_j$.

Una base de un espacio topológico genera una cierta topología τ si para todo $U \in \tau$ se tiene que para todo punto $x \in U$ existe un elemento V de \mathcal{B} de modo que $x \in V \subset U$.

Una topología importante es la inducida por una distancia definida sobre un conjunto, es decir, la topología de un espacio métrico.

Definición 1.3 Una aplicación $d : X \times X \rightarrow [0, +\infty)$ se llama **distancia** si cumple las siguientes propiedades para $x, y, z \in X$.

I $d(x, y) = d(y, x)$.

II $d(x, y) = 0$ si, y solo si, $x = y$.

III $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, lo que se conoce por propiedad triangular.

Se dice que (X, d) es un **espacio métrico**.

En todo espacio métrico se pueden definir los conjuntos siguientes.

Definición 1.4 Sean (X, d) un espacio métrico, un punto $x \in X$ y $\varepsilon > 0$. Una **bola abierta** centrada en x de radio ε se corresponde con el conjunto siguiente:

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X : d(x, y) < \varepsilon\}$$

Si tomamos todas las bolas abiertas como base de una topología se tiene la topología del espacio métrico.

1.1. Curvas regulares

En primer lugar vamos a dar la definición de curva regular en el caso particular en el que la curva está inmersa en \mathbb{R}^3 .

Definición 1.5 Una aplicación $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}^3$ se dice que es una **curva regular** si es de clase \mathcal{C}^∞ y para la cual $\gamma'(t_0) = (\frac{d\gamma}{dt})(t_0) \neq 0$ para todo $t_0 \in (a, b)$.

Una misma traza de la curva puede estar expresada de varias formas, es decir, pueden existir distintas parametrizaciones.

Definición 1.6 Un **difeomorfismo** en \mathbb{R} es una aplicación diferenciable, biyectiva y de inversa diferenciable.

Un cambio de parámetro es un difeomorfismo $t : (c, d) \rightarrow (a, b)$ y al difeomorfismo inverso lo llamamos cambio de parámetros inverso.

Se define la longitud de arco de una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ a partir de t_0 como:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\gamma'(t)\| dt$$

donde $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}$. Además, como $\gamma'(t) \neq 0$ para todo $t \in (a, b)$, la función $s(t)$ es diferenciable y como $ds/dt(t) = \|\gamma'(t)\| > 0$, la función $s(t)$ es estrictamente creciente y por lo tanto biyectiva con su imagen, la cual denotamos como (c, d) . Si $h : (c, d) \rightarrow (a, b)$ es la función inversa de $s(t)$, consideramos la reparametrización de γ dada por $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(h(s))$ que cumple $\|\tilde{\gamma}'(t)\| = 1$.

Definición 1.7 Una curva se dice que está parametrizada **de modo natural** o por **longitud de arco** si $\|d\gamma/dt(t)\| = 1$ para todo $t \in (a, b)$.

Para definir esta parametrización sólo hemos usado la definición de curva regular, luego todas las curvas regulares admiten parametrización natural. Dada una curva cualesquiera $\gamma(s)$ inmersa en \mathbb{R}^3 y parametrizada por la longitud de arco, podemos definir los vectores del **triedro de Frenet-Serret**: $\{T, N, B\}$ que se corresponden con el vector tangente $T(s) = d\gamma/ds(s)$, el vector normal $N(s) = T'(s)/\|T'(s)\|$ y el binormal $B(s) = T(s) \times N(s)$, donde \times denota el producto vectorial. El vector curvatura se define como $k(s) = \|T'(s)\|$ y la curvatura como la cantidad $\kappa(s) = \|T'(s)\|$. De hecho, para cada s que verifica $\kappa(s) \neq 0$ el conjunto $\{T(s), N(s), B(s)\}$ define una base ortonormal (ver [17, Cap. 2]).

1.2. Superficies

Comenzamos definiendo superficies contenidas en \mathbb{R}^3 .

Definición 1.8 Una **superficie simple** es una aplicación inyectiva de clase \mathcal{C}^∞ , $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ donde U es un conjunto abierto con coordenadas u, v tales que $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \neq 0$. Una **superficie regular** en \mathbb{R}^3 es una superficie localmente simple, es decir, que todo punto admite un entorno para el cual existe un abierto en \mathbb{R}^2 en las condiciones de la definición anterior.

De este modo, si tenemos la curva $\alpha : (a, b) \rightarrow U$ y consideramos la aplicación $\gamma = \mathbf{x} \circ \alpha : (a, b) \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset M$ obtenemos una aplicación de clase \mathcal{C}^∞ que además es una curva en $\mathbf{x}(U)$. Diremos que una curva en estas condiciones es una curva contenida en la superficie M . Ilustramos un ejemplo en la figura 1.1. Existen funciones $\gamma^1(t), \gamma^2(t)$ de modo que $\gamma(t) = \mathbf{x}(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$, utilizando la regla de la cadena se tiene:

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u} \frac{d\gamma^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial v} \frac{d\gamma^2}{dt} \quad (1.1)$$

Denotaremos también $\gamma'(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$.

Definición 1.9 Decimos que un vector v es tangente a una superficie simple $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ en $P = \mathbf{x}(u_0, v_0)$ si existe una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathbf{x}(U)$ con $\gamma(t_0) = P$ para $t_0 \in (a, b)$ tal que $\gamma'(t_0) = v$.

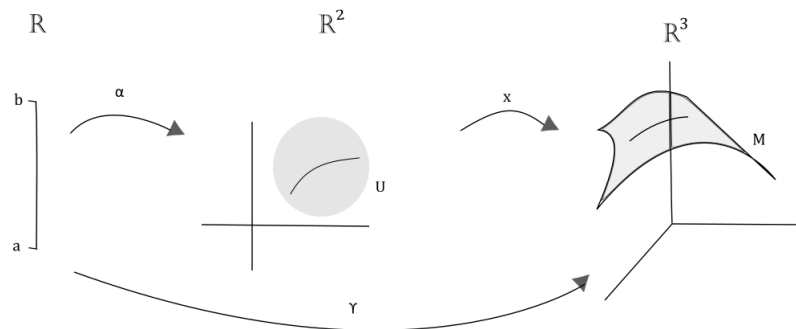


Figura 1.1: Curvas definidas sobre una superficie de \mathbb{R}^3

1.3. Primera forma fundamental

En cada punto de una superficie regular se puede definir el espacio tangente bidimensional. En esta sección consideraremos superficies regulares y cuando hablemos de $P \in M$ en nuestras definiciones entenderemos que existe una superficie simple o parametrización $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M \subset \mathbb{R}^3$ con $P \in \mathbf{x}(U)$.

Definición 1.10 El *espacio tangente* $T_P M$ de una superficie M en un punto $P \in M \subset \mathbb{R}^3$ se define como el conjunto de los vectores tangentes en dicho punto (definidos en 1.9).

Notación: Se definen los siguientes vectores de $T_P M$:

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i}$$

con $u^1 = u$ y $u^2 = v$. De la misma forma introducimos la siguiente notación:

$$\mathbf{x}_{ij} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} = \mathbf{x}_{ji}$$

Al introducir esta notación junto con la definición de superficie regular y curvas contenidas en superficies, queda claro que $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ es una base de $T_P M$ (ver [17, Cap 4]).

Dada una superficie M en \mathbb{R}^3 , se quiere calcular el producto escalar de dos vectores tangentes a la superficie en un punto $P \in M$, con $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U)$ y $P \in \mathbf{x}(U)$.

Notación: Introducimos el convenio de sumación de Einstein, según el cual entendemos que se trata de un sumatorio cuando se representan con la misma letra un subíndice y un superíndice. Lo aplicamos a los vectores tangentes a la superficie $X = \sum \mathbf{x}_i X^i = \mathbf{x}_i X^i$.

Teniendo en cuenta que el producto escalar es una aplicación bilineal, dados los vectores $X = \mathbf{x}_i X^i$ e $Y = \mathbf{x}_j Y^j$, se tiene que:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^2 X^i Y^j \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$$

donde \langle, \rangle denota el producto escalar. De modo que si denotamos

$$g_{ij}(u, v) = \langle \mathbf{x}_i(u, v), \mathbf{x}_j(u, v) \rangle \quad \text{o bien} \quad g_{ij} = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j \rangle$$

Tenemos lo siguiente:

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j=1}^2 X^i Y^j g_{ij}$$

Definición 1.11 Se llama *primera forma fundamental* de la superficie M en un punto P a la forma bilineal simétrica $g : T_P M \times T_P M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $g(X, Y) = X^i Y^j g_{ij}$

La aplicación bilineal definida anteriormente es un producto escalar y por lo tanto será definida positiva, con lo que se tiene que $\langle \mathbf{x}_i(u, v), \mathbf{x}_i(u, v) \rangle > 0$.

Como la primera forma fundamental es bilineal, simétrica y definida positiva, se tiene que la matriz $g = (g_{ij})$ es inversible y la inversa de ésta se denota por g^{-1} . Los coeficientes de g^{-1} se denotan g^{ij} .

Otra forma de expresar la primera forma fundamental es utilizando el espacio dual de $T_P M$, definido como $T_P^* M = \text{Hom}(T_P M, \mathbb{R})$. Una base del mismo es $\{d\mathbf{x}^1, d\mathbf{x}^2\}$ que actúa sobre la base de $T_P M$ como $d\mathbf{x}^i(\mathbf{x}_j) = \delta_j^i$. Con esta noción, obtenemos una nueva forma de escribir la primera forma fundamental ds^2 :

$$ds^2 = g_{ij} d\mathbf{x}^i d\mathbf{x}^j$$

Notación: Hemos escrito la segunda forma de definir la primera forma fundamental como un producto de elementos de $T_P^* M$, aunque en realidad nos estamos refiriendo al producto tensorial. La forma de actuar es equivalente a la anterior, dados dos vectores X, Y expresados como antes:

$$g_{ij} d\mathbf{x}^i d\mathbf{x}^j(X, Y) = g_{ij} X^i Y^j$$

A continuación, introducimos la forma de calcular los ángulos entre vectores de $T_P M$ con $P \in M$, ya que el cálculo de estos se deriva del producto escalar.

Definición 1.12 Sea M una superficie regular y $P \in M$. El ángulo θ entre dos vectores X e Y de $T_P M$, se obtiene de

$$\cos \theta = \frac{\langle X, Y \rangle}{\|X\| \|Y\|} \quad (1.2)$$

Además, la métrica servirá para introducir una distancia. En primer lugar, veamos cómo se calcula la longitud de una curva utilizando la primera forma fundamental de la superficie. Sea $\gamma(t) = \mathbf{x}(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$, con $t \in (a, b)$, una curva contenida en una superficie M , su longitud viene dada por:

$$\int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{g_{11}((\gamma^1)')^2 + 2g_{12}(\gamma^1)'(\gamma^2)' + g_{22}((\gamma^2)')^2} dt \quad (1.3)$$

De este modo, podemos definir la distancia entre dos puntos de una superficie como el ínfimo de las longitudes de las curvas que conectan ambos puntos.

Del mismo modo que hemos introducido la noción de longitud de una curva, podemos introducir la de área de una región en una superficie regular.

Definición 1.13 Dada una superficie regular M , $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset M$ y $R \subseteq U$, decimos que el área de $\mathbf{x}(R)$ es

$$\int \int_R \|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\| dudv = \int \int_R \sqrt{\det(g)} dudv = \int \int_R \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} dudv \quad (1.4)$$

1.4. Curvas contenidas en superficies

Sean M una superficie en \mathbb{R}^3 y un punto P_0 de la misma. Fijamos una parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ con $P_0 \in \mathbf{x}(U)$. Definimos el vector normal unitario como

$$n = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{\|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2\|}$$

Sea $\gamma(s) = \mathbf{x}(\gamma^1(s), \gamma^2(s))$ una curva parametrizada por la longitud de arco contenida en la superficie M . Definimos un nuevo vector unitario a partir de los vectores del triedro de Frenet de γ y el vector normal unitario de la superficie en el punto $\gamma(s_0) = P_0 \in M$. Éste es el vector normal intrínseco a la curva

$$S(s_0) = n(s_0) \times T(s_0).$$

Se tiene que $T(s_0) \in T_{P_0}M$ y $n(s_0)$ es perpendicular a $T_{P_0}M$, luego el vector $S(s_0) \in T_{P_0}M$ y es perpendicular a $T(s_0)$. Se deduce que, como el plano tangente tiene dimensión 2, $\{T(s_0), S(s_0)\}$ es una base ortonormal de $T_{P_0}M$ y $\{T(s_0), S(s_0), n(s_0)\}$ es una base ortonormal de \mathbb{R}^3 . De este modo el vector de curvatura se puede descomponer de forma única en los siguientes:

$$\kappa(s)N(s) = \kappa_n(s)n(s) + \kappa_g(s)S(s) \quad (1.5)$$

Las cantidades κ_n y κ_g se conocen respectivamente como curvatura normal y geodésica. La curvatura normal nos dice cómo se curva la curva en conjunto con la superficie, mientras que la curvatura geodésica nos dice cuánto se curva vista desde dentro de la superficie.

Definición 1.14 Decimos que una curva γ contenida en una superficie M es **geodésica** si $\kappa_g(s) = 0$ para todo s .

Definición 1.15 Dada una superficie M y una parametrización $\mathbf{x} : U \rightarrow \mathbb{R}^2$, se definen las funciones $L_{ij} = \langle \mathbf{x}_{ij}, n \rangle$ y se llaman coeficientes de la **segunda forma fundamental**. Las funciones $\Gamma_{ij}^k = \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_l \rangle g^{kl}$ se denominan **símbolos de Christoffel**.

Se deduce la expresión de los símbolos de Christoffel:

Proposición 1.16 Los símbolos de Christoffel tienen la expresión siguiente:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{lk} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} \right] \quad (1.6)$$

Demostración: Para tres índices cualesquiera i, j, l se tiene que $\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = \langle \mathbf{x}_{il}, \mathbf{x}_j \rangle + \langle \mathbf{x}_{jl}, \mathbf{x}_i \rangle$.

De esta forma si hacemos $\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} = 2\langle \mathbf{x}_{ji}, \mathbf{x}_l \rangle$.

Sustituyendo en la ecuación presentada en la definición, llegamos a la expresión de los símbolos de Christoffel buscada. \square

Teorema 1.17 Con las notaciones anteriores tenemos que

$$\mathbf{x}_{ij} = L_{ij}n + \mathbf{x}_k \Gamma_{ij}^k \quad (1.7)$$

que se denominan **ecuaciones de Gauss** de la superficie.

Demostración: Lo que representan las ecuaciones de Gauss es la escritura de los vectores \mathbf{x}_{ij} en función de los tres vectores que forman una base del espacio ambiente \mathbb{R}^3 : \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 y n . De hecho, los vectores \mathbf{x}_i y n son ortogonales. La representación de \mathbf{x}_{ij} en la base será única

y vamos a llamar a_{ij}^k a los coeficientes de \mathbf{x}_k para $k = 1, 2$ y a_{ij}^3 al de n . En primer lugar, como sabemos que n es ortogonal a los otros dos, tenemos $\langle \mathbf{x}_{ij}, n \rangle = a_{ij}^3 = L_{ij}$. En segundo lugar, $\langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_l \rangle = g_{ml} a_{ij}^m$, es decir, tenemos que: $g^{lk} \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_l \rangle = g^{lk} g_{ml} a_{ij}^m = \delta_m^k a_{ij}^m = a_{ij}^k$. De la definición 1.15, tenemos que $g^{lk} \langle \mathbf{x}_{ij}, \mathbf{x}_l \rangle = \Gamma_{ij}^k$, luego $a_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k$ para $k = 1, 2$. \square

Proposición 1.18 *La curvatura geodésica de una curva γ se puede calcular de*

$$\kappa_g S = \mathbf{x}_k [(\gamma^k)'' + \Gamma_{ij}^k (\gamma^i)' (\gamma^j)'] \quad (1.8)$$

Demostración: Como se tiene que $\gamma(t) = \mathbf{x}(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$ está parametrizada por la longitud de arco, $\kappa(s)N(s) = \gamma''(s)$. Escribimos γ' en términos de la base del espacio tangente $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, como mostramos en la ecuación (1.1):

$$\gamma' = \mathbf{x}_i (\gamma^i)'.$$

Aplicando la regla de la cadena, tenemos

$$\gamma'' = \mathbf{x}_{ij} (\gamma^i)' (\gamma^j)' + \mathbf{x}_i (\gamma^i)''.$$

Sustituyendo las ecuaciones de Gauss en ésta se tiene que

$$\gamma'' = (\mathbf{x}_k \Gamma_{ij}^k + L_{ij} n) (\gamma^i)' (\gamma^j)' + \mathbf{x}_i (\gamma^i)''$$

Por la ecuación (1.5), $L_{ij} n (\gamma^i)' (\gamma^j)' = \kappa_n n$ y tenemos lo que queríamos. \square

De la proposición anterior y de la definición de curva geodésica se deduce directamente el siguiente resultado.

Corolario 1.19 *Las ecuaciones diferenciales que determinan las geodésicas son:*

$$(\gamma^k)'' + \Gamma_{ij}^k (\gamma^i)' (\gamma^j)' = 0 \quad (1.9)$$

1.5. Aplicaciones entre superficies

En esta sección se van a definir distintas aplicaciones entre superficies.

Definición 1.20 *Dadas dos superficies M y N , un punto $P \in M$ y dos parametrizaciones $\mathbf{x} : U \rightarrow M$ e $\mathbf{y} : V \rightarrow N$ tales que $P \in \mathbf{x}(U) \subset M$ y $f(P) \in \mathbf{y}(V) \subset N$, decimos que una aplicación $f : M \rightarrow N$ es **diferenciable** en P si la aplicación $\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}$ lo es en $\mathbf{x}^{-1}(P)$. La aplicación f será diferenciable en M si lo es en todo punto de la misma.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{x}(U) \subset M & \xrightarrow{f} & \mathbf{y}(V) \subset N \\ \mathbf{x} \uparrow & & \mathbf{y} \uparrow \\ U \subset \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{\mathbf{y}^{-1} \circ f \circ \mathbf{x}} & V \subset \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Definición 1.21 *Una aplicación diferenciable $f : M \rightarrow N$ es un **difeomorfismo** si es biyectiva y su inversa es diferenciable.*

Definición 1.22 *Un difeomorfismo $f : M \rightarrow N$ se dice que es una **isometría** si dada una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tiene la misma longitud que $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow N$.*

1.6. Métricas riemannianas

Para este desarrollo seguimos [8, Cap.0].

Definición 1.23 Sea M un conjunto. Una aplicación $\mathbf{x} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbf{x}(U) \subset M$ se dice que es una **parametrización** si es inyectiva y U es abierto en \mathbb{R}^n . Se denotan (U, \mathbf{x}) .

A una colección \mathcal{A} de parametrizaciones se le llama **atlas** \mathcal{C}^∞ si todo punto P de M está en la imagen de alguna aplicación \mathbf{x} , además, si dadas dos parametrizaciones cualesquiera tales que $\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V) \neq \emptyset$, los cambios de parametrización que son $\mathbf{y}^{-1} \circ \mathbf{x} : \mathbf{x}^{-1}(\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V)) \rightarrow \mathbf{y}^{-1}(\mathbf{x}(U) \cap \mathbf{y}(V))$ y sus inversas son difeomorfismos.

El conjunto M es una **variedad diferenciable** si está dotado de un atlas maximal, es decir, un atlas que no se pueda incluir en ningún otro. La dimensión de la variedad es la misma dimensión que la del \mathbb{R}^n .

Un atlas maximal dota una base de una topología a la variedad diferenciable.

Una vez que tenemos el concepto de variedad diferenciable tenemos que una superficie se puede interpretar como un caso particular de ésta.

Definición 1.24 Una variedad diferenciable se dice que es una superficie si los abiertos de la parametrización de la variedad se toman en \mathbb{R}^2 . Equivalentemente, una variedad diferenciable es una superficie si tiene dimensión dos.

Revisando ambas nociones de superficie, la segunda definición nos da una visión abstracta de lo que es una superficie, mientras que la primera nos da un caso particular, cuando éstas están contenidas en \mathbb{R}^3 .

Por el momento hemos dotado a la superficie de una definición local de primera forma fundamental pero siempre vamos a tener que trabajar con una parametrización en \mathbb{R}^3 de la misma. Vamos a dar una definición de la métrica más general pero para ello vamos a introducir algunos conceptos.

Dada una superficie M de forma abstracta podemos definir el anillo de funciones $\mathcal{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ diferenciable}\}$. Con ello podemos definir el espacio tangente de la variedad, que coincidirá con la noción vista para superficies en \mathbb{R}^3 .

Dada una curva regular $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$, se dice que su derivada es $\gamma'(t) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\gamma'(t)(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(t)$.

Definición 1.25 Dada una variedad diferenciable M , un punto $P \in M$ y $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$ una curva con $\gamma(0) = P$, se dice que el vector tangente a la misma en P es una función $\gamma'(0) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que $\gamma'(0)(f) = \frac{d(f \circ \gamma)}{dt}(0)$. El conjunto de todos los vectores tangentes a la superficie en P por la definición que acabamos de dar se conoce como el **espacio tangente** a la variedad en un punto y se denota por $T_P M$.

Observación 1.26 El vector tangente esta bien definido porque podemos considerar:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & U & \xrightarrow{\mathbf{x}} & M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (\gamma^1(t), \gamma^2(t)) & \longrightarrow & \mathbf{x}(\gamma^1(t), \gamma^2(t)) & \longrightarrow & f \circ \mathbf{x}(\gamma^1(t), \gamma^2(t)) \end{array}$$

con $\gamma = \mathbf{x}(\gamma^1(t), \gamma^2(t))$. Entonces se tiene:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{d(f \circ \mathbf{x} \circ \mathbf{x}^{-1} \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial(f \circ \mathbf{x})}{\partial u^i} \frac{d\gamma^i}{dt}$$

Por cuestiones de notación, teniendo en cuenta que los u^i pertenecen a U , definimos la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial(f \circ \mathbf{x})}{\partial u^i}$. De este modo resumimos:

$$\frac{d(f \circ \gamma)}{dt} = \frac{\partial(f \circ \mathbf{x})}{\partial u^i} \frac{d\gamma^i}{dt} = \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{d\gamma^i}{dt} \right) (f)$$

Como conclusión, los vectores $\left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)$ son los vectores tangentes a las curvas coordenadas de la superficie y forman una base del espacio tangente $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x^1} \right), \left(\frac{\partial}{\partial x^2} \right) \right\}$. Encontramos la prueba de este resultado en [17, Cap. 7].

Una vez que tenemos una noción clara del plano tangente en una superficie definida de forma abstracta, podemos definir la noción de campo de vectores.

Definición 1.27 Un **campo vectorial** es una asignación de un vector $X_P \in T_P M$ de modo que para cada $f \in \mathcal{F}(M)$ cada $X(f)$ es una función en $\mathcal{F}(M)$ dada por $X(f)(P)$. El conjunto de campos vectoriales sobre una variedad se denota $\mathfrak{X}(M)$.

Introducimos en las superficies definidas como variedades diferenciables el concepto de métrica riemanniana como introdujimos anteriormente el de primera forma fundamental para superficies en \mathbb{R}^3 .

Definición 1.28 Dada una superficie M , se define una **métrica riemanniana** como una correspondencia que le asocia a cada punto $P \in M$ un producto escalar (aplicación bilineal, simétrica y definida positiva) sobre el espacio tangente en dicho punto $T_P M$, que varía de forma diferenciable, es decir, que dada una parametrización (U, \mathbf{x}) con $P \in \mathbf{x}(U)$, se tiene que si $\mathbf{x}(u_0, v_0) = P$, $g_{ij}(u_0, v_0) = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right)_P, \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right)_P \right\rangle$ es una función diferenciable. Se dice que M es una **superficie riemanniana** si está dotada de una métrica riemanniana y se denota por (M, g) .

El hecho de que se denomine métrica es porque se utiliza para medir distancias en una variedad. La distancia que define es igual a la presentada en la sección 1.3 de este capítulo, es decir, el ínfimo de todas longitudes de las curvas diferenciables (o diferenciables a trozos) que unen dos puntos de la variedad.

El siguiente corolario se sigue del teorema de [16, cap. 6].

Corolario 1.29 La topología inducida por una distancia (definición 1.4) en una superficie coincide con la topología inicial de la superficie.

Capítulo 2

El árbol de Farey y las fracciones continuas

2.1. El árbol de Farey

En primer lugar vamos a introducir la noción de los pares de Farey y sus propiedades. Nos basamos en [5].

Definición 2.1 *Dados dos números $p/q, r/s \in \mathbb{Q}$, decimos que forman un **par de Farey** si cumplen que $|ps - qr| = 1$.*

Definición 2.2 *Dados dos números racionales p/q y r/s que son un par de Farey, denotamos como $p/q \oplus_F r/s = \frac{p+r}{q+s}$ al número racional conocido como **suma de Farey** de p/q y r/s .*

Notación: El símbolo \oplus denotará a lo largo de este texto \oplus_F .

Proposición 2.3 *Tanto p/q como r/s forman pares de Farey con $p/q \oplus_F r/s$ en el caso de que p/q y r/s lo sean.*

Demostración: Supongamos que $|ps - qr| = 1$. Entonces: $|(p+r)q - (q+s)p| = |pq + rq - pq - ps| = |rq - ps| = 1$. De igual forma procedemos para r/s y $p/q \oplus_F r/s$. \square

Observación 2.4 *A lo largo de este capítulo utilizaremos $\frac{1}{0}$ para denotar el punto del infinito de $\mathbb{P}_{\mathbb{Q}}^1$ si identificamos \mathbb{Q} con la carta afín $\{[\frac{p}{q} : 1] : \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\}$ y $[1 : 0]$ como el punto del infinito de \mathbb{Q} .*

Podemos definir los conceptos de padres e hijos, en el sentido de Farey, de un número racional. Dado un número racional de la forma $\frac{p}{q} = \frac{p_1}{q_1} \oplus \frac{p_2}{q_2}$ con $\frac{p_1}{q_1} < \frac{p_2}{q_2}$, decimos que $\frac{p}{q}$ tiene como padre por la izquierda a $\frac{p_1}{q_1}$ y lo denotamos como $L\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p_1}{q_1}$, y que tiene a $\frac{p_2}{q_2}$ como padre por la derecha y lo denotamos $R\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p_2}{q_2}$. Observemos que $L\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{p}{q} < R\left(\frac{p}{q}\right)$.

Con estas notaciones, llamamos hijos de Farey de $\frac{p}{q}$ por la izquierda y por la derecha respectivamente a $l\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \oplus \frac{p_1}{q_1}$ y $r\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q} \oplus \frac{p_2}{q_2}$. Notemos que $l\left(\frac{p}{q}\right) < \frac{p}{q} < r\left(\frac{p}{q}\right)$. Posteriormente vamos a probar que todo número racional se puede expresar de forma única como suma de Farey de otros dos números racionales que forman un par de Farey. De este modo podemos dibujar el árbol de Farey, presentado en la figura 2.1. Consideramos por convenio $r\left(\frac{0}{1}\right) = l\left(\frac{1}{0}\right) = \frac{1}{1}$, podemos ver el árbol de Farey comenzando desde $\frac{1}{1}$ como un árbol binario desde el cual se pueden construir todos los números racionales no negativos. En las siguientes proposiciones vamos a trabajar con el árbol de Farey y números racionales entre 0 y 1. En este caso se puede considerar el árbol de Farey como un árbol binario partiendo de $\frac{1}{2}$, se puede generalizar a números racionales entre n y $n+1$, en cuyo caso se tomaría el árbol de Farey como un árbol binario partiendo de $\frac{2n+1}{2}$.

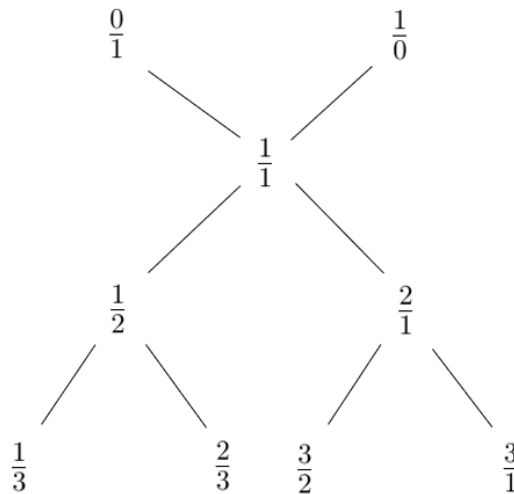


Figura 2.1: Primeros números racionales colocados en el árbol de Farey

Notación: A lo largo del texto, utilizaremos (n, m) con $n, m \in \mathbb{Z}$ para referirnos al máximo común divisor de los dos enteros.

Definición 2.5 Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la **sucesión de Farey** de orden n como:

$$\mathcal{F}_n = \left\{ \frac{p}{q} : 0 \leq p \leq q \leq n, p, q \in \mathbb{Z} \text{ y } (p, q) = 1 \right\}$$

Los elementos de esta sucesión se dan ordenados de menor a mayor.

Se puede notar que $\mathcal{F}_{n-1} \subseteq \mathcal{F}_n$. Se tiene la siguiente propiedad para dos números consecutivos de una sucesión de Farey.

Proposición 2.6 Sean $n \in \mathbb{N}$, y $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dos elementos consecutivos de \mathcal{F}_n , entonces $cb - ad = 1$.

Demostración: Para el caso $n = 1$ es cierto ya que sólo encontramos a 0 y a 1, que evidentemente forman un par de Farey:

$$1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1$$

Supongamos cierto el caso $n - 1$.

Sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ dos elementos consecutivos de \mathcal{F}_{n-1} que por hipótesis de inducción cumplen $cb - ad = 1$, definimos $A = \{\frac{p}{q} \in \mathcal{F}_n : \frac{a}{b} < \frac{p}{q} < \frac{c}{d}\}$. Sea $\frac{e}{f} \in A$, suponiendo que éste conjunto sea no vacío, ya que si lo fuera, $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ serían dos elementos consecutivos de \mathcal{F}_n y directamente se tendría el resultado. Suponiendo que A es no vacío, resolvamos el siguiente sistema en función de los parámetros r, s .

$$be - af = r$$

$$cf - de = s$$

Como $cb - ad = 1$, la solución de este sistema está dada por $e = sa + rc$ y $f = sb + rd$. Notemos que si $r, s = 1$, los tres elementos $\frac{a}{b}, \frac{e}{f}, \frac{c}{d}$ forman pares de Farey.

Definamos el conjunto $B = \{\frac{p}{q} = \frac{\mu a + \lambda c}{\mu b + \lambda d} : \mu, \lambda \in \mathbb{N}, (\mu, \lambda) = 1\}$, evidentemente todos los elementos de B están comprendidos entre $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ por lo siguiente

$$b(\mu a + \lambda c) - a(\mu b + \lambda d) = \lambda > 0$$

$$c(\mu b + \lambda d) - d(\mu a + \lambda c) = \mu > 0$$

Por una parte, los elementos de B sólo forman pares de Farey con $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ en el caso de que $\lambda = 1$ y $\mu = 1$. Además, cada elemento de B estará en un \mathcal{F}_m para algún m . Evidentemente, el denominador más pequeño se encuentra cuando $\mu = 1$ y $\lambda = 1$, de hecho la fracción obtenida cumplirá que $(\mu a + \lambda c, \mu b + \lambda d) = (a + c, b + d) = 1$, de modo que como A es no vacío, este elemento es $\frac{e}{f}$ en \mathcal{F}_n si le damos los valores $r = 1$ y $s = 1$ en el sistema planteado.

Por otra parte, veamos que $\frac{e}{f}$ es único en A , por lo que hemos deducido que $\frac{e}{f}$ es el elemento que buscábamos. Como se ha llegado a la conclusión de que si A es no vacío $\frac{e}{f} = \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$ y $\frac{e}{f} \in \mathcal{F}_n$ pero $\frac{e}{f} \notin \mathcal{F}_{n-1}$, se tiene que $f = n$. Además, cualquier otro elemento de \mathcal{F}_n que no esté en \mathcal{F}_{n-1} , tendrá denominador n , luego será de la forma $\frac{e+m}{n}$ con $m \in \mathbb{Z}$, $-e \leq m \leq n - e$. Para que $\frac{e+m}{n}$ esté en A , necesitamos que

$$nc - (e + m)d > 0 \quad na - (e + m)b < 0$$

Pero la primera condición falla si $m > 0$ y la segunda si $m < 0$.

Concluimos que $\frac{a}{b}, \frac{e}{f}$ y $\frac{c}{d}$, son tres elementos consecutivos de \mathcal{F}_n y que se cumple que $be - fa = 1$ y que $cf - ed = 1$. \square

Notación: Para que no haya confusiones con la forma de denotar las fracciones continuas, dado $x \in \mathbb{R}$ denotamos $\lfloor x \rfloor$ la parte entera de x .

Proposición 2.7 *Todo número racional se puede expresar de forma única como la suma de Farey de otros dos números racionales (o de un número racional y $\frac{1}{0}$) que formen un par de Farey.*

Demostración: Por simplificar, se han tomado las sucesiones de Farey entre 0 y 1. Cualquier otro número racional x se puede expresar como $a_0 + \frac{p}{q}$ donde $a_0 = \lfloor x \rfloor$ y $\frac{p}{q} \in \mathcal{F}_q$. Nos basamos en el anterior resultado. En primer lugar, sea $0 < \frac{p}{q} < 1$ un número racional cualesquiera con $q \geq 2$. Consideremos la sucesión de Farey de orden q y sean $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son los elementos precedente y posterior respectivamente, de modo que $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathcal{F}_{q-1}$. Utilizando la proposición anterior, $p = a + c$ y $q = b + d$, con lo que $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$. En el caso de que x sea un número racional de la forma $a_0 + \frac{p}{q}$ con $a_0 = \lfloor x \rfloor \neq 0$, tomamos para $\frac{p}{q}$ los dos números $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$, y se tiene que $a_0 + \frac{p}{q} = (a_0 + \frac{a}{b}) \oplus (a_0 + \frac{c}{d})$.

En el caso de que $q < 2$, nos quedan los números enteros que se pueden expresar $\frac{n}{1} = \frac{n-1}{1} \oplus \frac{1}{0}$. Veamos ahora la unicidad de esta descomposición para $q > 1$, siguiendo [21, Cap. 1]. Sean $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ de modo que $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ con $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$. Supongamos que existe otro par $\frac{a'}{b'} < \frac{c'}{d'}$ con $\frac{p}{q} = \frac{a'}{b'} \oplus \frac{c'}{d'}$. Se tiene que cumplir que

$$\begin{aligned} a'q - b'p &= -1 \\ c'q - d'p &= 1 \end{aligned}$$

Recordemos que también se tiene que

$$\begin{aligned} aq - bp &= -1 \\ cq - dp &= 1 \end{aligned}$$

Si restamos expresiones, tenemos que

$$(a - a')q - (b - b')p = 0$$

Tenemos que $a - a' \neq 0$ si y solo si $b - b' \neq 0$. En ese caso llegamos a que

$$a - a' = \frac{p}{q}(b - b')$$

Como $a - a' \in \mathbb{Z}$, se tiene que también $\frac{p}{q}(b - b') \in \mathbb{Z}$ y como $\frac{p}{q}$ viene dada de modo que $(p, q) = 1$, tenemos que $q|(b - b')$. Sin embargo, $0 < b, b' \leq q$, luego $|b - b'| < q$, y se tiene una contradicción, es decir, $\frac{a'}{b'} = \frac{a}{b}$. Se utiliza la misma idea para demostrar $\frac{c'}{d'} = \frac{c}{d}$.

Faltaría por demostrar el caso en el que $q = 1$, es decir, para los enteros $\frac{n}{1}$. Como el denominador es 1, se tiene que las fracciones que cumplen $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$ verifican $b + d = 1$, luego o bien $b = 1$ y $d = 0$ o bien $b = 0$ y $d = 1$. Supongamos que estamos en el primer caso (en el otro procedemos de forma similar). Como $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ forman un par de Farey $bc - ad = 1$ y por lo tanto $c = 1$. Además, como $a + c = n$, obtenemos que $\frac{a}{b} = \frac{n-1}{1}$ y que $\frac{c}{d} = \frac{1}{0}$. \square

2.2. Fracciones continuas

Vamos a definir el concepto de fracción continua. Seguiremos [5, 15, 23].

Definición 2.8 Dada una serie de números naturales $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ con $a_i > 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ y $a_0 \in \mathbb{Z}$, se define la **fracción continua finita** $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, como el siguiente número racional

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\dots + \frac{1}{a_n}}}}$$

Este tipo de representación se utiliza para la expresión de números racionales, aunque pronto veremos que también se utiliza para la aproximación de números irracionales que se pueden expresar como fracciones continuas infinitas, de las que se tiene una expresión conocida.

Veamos algunas de las propiedades de las fracciones continuas para la expresión de números racionales.

Proposición 2.9 Todo número racional $\frac{p}{q}$ tiene dos expresiones en fracciones continuas: $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ y $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n - 1, 1]$

Demostración: De forma directa $a_n = a_n - 1 + \frac{1}{1}$. □

Observación 2.10 Aunque para los números racionales existan siempre dos representaciones distintas en fracciones continuas, se elegirá generalmente en este trabajo la opción que implique un menor número de enteros.

Proposición 2.11 Dada una fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$, se tiene una serie de números racionales llamados convergentes $\left\{ \frac{p_i}{q_i} \right\}_{i=0}^n$ con $\frac{p_i}{q_i} = [a_0; a_1, \dots, a_i]$ que se calculan a partir de la expresión siguiente

$$\begin{aligned} p_0 &= a_0, & p_1 &= a_1 p_0 + 1, & \dots & p_n &= a_n p_{n-1} + p_{n-2}, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= a_1, & \dots & q_n &= a_n q_{n-1} + q_{n-2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Demostración: Para el caso $k = 0$ se tiene que $p_0 = a_0$ y $q_0 = 1$. Para el caso $k = 1$, es fácil ver que si $p_1 = a_1 p_0 + 1$ y $q_1 = a_1$, entonces $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 a_0 + 1}{a_1} = a_0 + \frac{1}{a_1} = [a_0; a_1]$

Procedemos por inducción, suponiendo que es cierto para $k < n$.

Sea la fracción continua de longitud $n - 1$, $[a_1; a_2, \dots, a_n]$. Se tienen los convergentes $\frac{p'_k}{q'_k}$ de dicha fracción continua, que cumplen por construcción

$$\frac{p'_k}{q'_k} = a_0 + \frac{q'_{k-1}}{p'_{k-1}} \quad (2.2)$$

De esta forma relacionamos $p_n = a_0 p'_{n-1} + q'_{n-1}$ y $q_n = p'_{n-1}$. Por otra parte, por hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} p'_{n-1} &= a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} \\ q'_{n-1} &= a_n q'_{n-2} + q'_{n-3} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Con lo que utilizando (2.2) y (2.3) en las expresiones obtenidas para p_n y q_n , tenemos que

$$\begin{aligned} p_n &= a_0(a_n p'_{n-2} + p'_{n-3}) + (a_n q'_{n-2} + q'_{n-3}) \\ &= a_n(a_0 p'_{n-2} + q'_{n-2}) + a_0 p'_{n-3} + q'_{n-3} \\ &= a_n p_{n-1} + p_{n-2} \\ q_n &= p'_{n-1} = a_n p'_{n-2} + p'_{n-3} = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \end{aligned}$$

□

La siguiente proposición se ha seguido de [3, Cap.1].

Proposición 2.12 *Dada una fracción continua $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ y los convergentes asociados $\left\{ \frac{p_k}{q_k} \right\}_{k=0}^n$, se cumple que:*

1. $p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = (-1)^k$ para $k \geq 1$.
2. $q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} = (-1)^{k-1} a_k$ para $k \geq 2$.
3. $(p_k, q_k) = 1$
4. $\frac{p_0}{q_0} < \frac{p_2}{q_2} < \dots < \frac{p}{q} < \dots < \frac{p_3}{q_3} < \frac{p_1}{q_1}$. Es decir, la serie de convergentes pares es menor que $\frac{p}{q}$ y la de los impares es mayor.

Demostración:

1. Para $k = 1$, como $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ y $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$, se tiene que $p_0 q_1 - p_1 q_0 = a_0 a_1 - (a_0 a_1 + 1) = -1$.

Supongamos que la igualdad es cierta para $k - 1$.

Calculemos $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k}$. Por una parte, tenemos $\frac{p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1}}{q_{k-1}q_k}$. Por otra parte, escribiendo $\frac{p_k}{q_k}$ con las expresiones dadas en (2.1):

$$\begin{aligned} \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}} &= \frac{(a_k q_{k-1} + q_{k-2})p_{k-1} - q_{k-1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2})}{q_{k-1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2})} \\ &= \frac{p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1}}{q_k q_{k-1}} = \frac{(-1)(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}} \end{aligned}$$

Con lo que igualando ambas expresiones se tiene que $p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = (-1)^k$.

2. A partir de la primera afirmación tenemos

$$\begin{aligned} q_k p_{k-2} - p_k q_{k-2} &= (a_k q_{k-1} + q_{k-2})p_{k-2} - (a_k p_{k-1} + p_{k-2})q_{k-2} \\ &= a_k(p_{k-2}q_{k-1} - p_{k-1}q_{k-2}) = (-1)^{k-1} a_k \end{aligned}$$

3. La tercera afirmación es consecuencia directa de la primera. Utilizando la identidad de Bezout encontramos enteros p_{k-1}, q_{k-1} tales que si k es par $p_{k-1}q_k - p_kq_{k-1} = 1$ y si k es impar $-p_{k-1}q_k + p_kq_{k-1} = 1$.
4. Utilizando la segunda afirmación, es fácil ver que $\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^{k-1}a_k}{q_kq_{k-2}}$, con lo que la sucesión de convergentes pares es creciente y la de impares es decreciente. A su vez, por la primera afirmación, se tiene que $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_kq_{k-1}}$, con lo que cada convergente impar es mayor que el convergente par sucesivo. Para ver que cada convergente impar es mayor que cualquier convergente par, se toma un convergente impar cualesquiera $\frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}}$ y otro par cualesquiera $\frac{p_{2j}}{q_{2j}}$. Si $2j < 2i$, se tiene que $\frac{p_{2i}}{q_{2i}} - \frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}} = \frac{(-1)^{2i+1}}{q_{2i}q_{2i+1}}$, y como $\frac{p_{2j}}{q_{2j}} < \frac{p_{2i}}{q_{2i}}$, también se tiene que $\frac{p_{2j}}{q_{2j}} - \frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}} < 0$. Supongamos ahora que $2j > 2i$, se deduce de la misma forma a partir de $\frac{p_{2j}}{q_{2j}} - \frac{p_{2j+1}}{q_{2j+1}} = \frac{(-1)^{2j+1}}{q_{2j}q_{2j+1}}$ y del hecho de que la sucesión de los convergentes impares es decreciente, se concluye que $\frac{p_{2j}}{q_{2j}} - \frac{p_{2i+1}}{q_{2i+1}} < 0$. Además, como $\frac{p}{q}$ es el último convergente, será un convergente par o impar. Si es par, será el mayor de los pares por ser la sucesión estrictamente creciente, y a su vez menor que cualquier convergente impar. Si es impar, será menor que los demás convergentes impares, por ser una sucesión estrictamente decreciente, mientras que por esto mismo también será mayor que cualquier otro convergente par. \square

También es posible expresar números irracionales en forma de fracciones continuas.

Definición 2.13 Dada una sucesión $(a_n)_n$ donde $a_n \in \mathbb{N}$ y $a_0 \in \mathbb{Z}$, $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ definimos la **fracción continua infinita** como el límite

$$[a_0; a_1, a_2, \dots] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$$

donde cada p_n, q_n están definidos por las expresiones (2.1).

El siguiente lema da coherencia a la definición anterior y muestra que las fracciones continuas infinitas están bien definidas, porque no tendría sentido definir $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$ si no fuera una sucesión convergente.

Lema 2.14 Existe el límite de los convergentes de una fracción continua.

Demostración: Por la cuarta parte de la proposición 2.12, se tiene que los convergentes pares e impares forman una sucesión monótona y acotada, en el caso de los convergentes pares superiormente y en el de los impares inferiormente. Además, retomando $\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} = \frac{(-1)^k}{q_kq_{k-1}}$, se tiene que si $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{(-1)^k}{q_kq_{k-1}} \right| = 0$, existirá $x = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_n}{q_n}$. Por construcción de los convergentes $q_n = a_nq_{n-1} + q_{n-2}$, con cada $q_i > q_{i-1} > q_0 = 1$ si $i > 2$, luego, el primer límite presentado es cero y se tiene que la sucesión $\left(\frac{p_n}{q_n} \right)_n$ es de Cauchy y converge en \mathbb{R} . \square

La posibilidad de expresar números irracionales mediante fracciones continuas nos da una forma de aproximar números irracionales mediante números racionales, tanto como se quiera. Algunas fracciones continuas especiales son las de números cuadráticos (ver [12]), es

decir, soluciones de alguna ecuación cuadrática de coeficientes enteros. Éstas fracciones continuas son periódicas ya que se cumple $a_k = a_{k+m}$ para algún m .

ALGORITMO DE CÁLCULO DE LA FRACCIÓN CONTINUA PARA $x \in \mathbb{R}$:

Paso 0. $x_0 = x$, $a_0 = \lfloor x \rfloor$

Paso k. Si $x_{k-1} \neq a_{k-1}$, $x_k = \frac{1}{x_{k-1} - a_{k-1}}$ y $a_k = \lfloor x_k \rfloor$.

Si $x_{k-1} = a_{k-1}$, el algoritmo termina y no se añaden más términos a la fracción continua.

Notemos que $x = x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1}$ y que para un cierto k , $x_k = a_k + \frac{1}{x_{k+1}}$

Teorema 2.15 *El algoritmo anterior nos da $x = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$*

Demostración: Sean $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$, tomamos $p_{-1} = 1$ y $q_{-1} = 0$. Veamos por inducción para $n \geq 0$.

$$x = \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} \quad (2.4)$$

- **n=0.** $x = x_0 = a_0 + \frac{1}{x_1} = \frac{x_1 a_0 + 1}{x_1} = \frac{x_1 p_0 + p_{-1}}{x_1 q_0 + q_{-1}}$.
- **n=1.** $\frac{x_2 p_1 + p_0}{x_2 q_1 + q_0} = \frac{x_2(a_1 p_0 + p_{-1})}{x_2 a_1 + 1} = \frac{(a_1 + \frac{1}{x_2})p_0 + 1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = \frac{x_1 a_0 + 1}{x_1} = x$.
- Suponemos cierto el caso **n-1** y queremos ver que se cumple para **n**.

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}p_n + p_{n-1}}{x_{n+1}q_n + q_{n-1}} &= \frac{x_{n+1}(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + p_{n-1}}{x_{n+1}(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + q_{n-1}} = \frac{(a_n p_{n-1} + p_{n-2}) + \frac{p_{n-1}}{x_{n+1}}}{(a_n q_{n-1} + q_{n-2}) + \frac{q_{n-1}}{x_{n+1}}} \\ &= \frac{(a_n + \frac{1}{x_{n+1}})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{x_{n+1}})q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{x_n p_{n-1} + p_{n-2}}{x_n q_{n-1} + q_{n-2}} = x \end{aligned}$$

Además para $k \geq 1$ se verifica lo siguiente

$$\frac{1}{2q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k(q_k + q_{k+1})} < \left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| < \frac{1}{q_k q_{k+1}} < \frac{1}{q_k^2} \quad (2.5)$$

Utilizando (2.4), la proposición 2.12 y las ecuaciones (2.1), tenemos que

$$\left| x - \frac{p_k}{q_k} \right| = \left| \frac{x_{k+1}p_k + p_{k-1}}{x_{k+1}q_k + q_{k-1}} - \frac{p_k}{q_k} \right| = \frac{(-1)^k}{(x_{k+1}q_k + q_{k-1})q_k}$$

Como $a_{k+1} < x_{k+1} < a_{k+1} + 1$ tenemos que $q_{k+1} = a_{k+1}q_k + q_{k-1} < x_{k+1}q_k + q_{k-1} < (a_{k+1} + 1)q_k + q_{k-1} = q_{k+1} + q_k$

Teniendo en cuenta que $q_k < q_{k+1}$ obtenemos las desigualdades de (2.5), y como consecuencia de éstas, $x = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_0; a_1, \dots, a_n]$. \square

Dado un número racional cualesquiera vamos a poder calcular su expresión en fracciones continuas utilizando el algoritmo de cálculo de las fracciones continuas y podemos verificar que el algoritmo funciona correctamente calculando los convergentes y viendo que el último se corresponde al número racional en cuestión. De igual forma, con este algoritmo podemos calcular las fracciones continuas que representan números irracionales. Como hemos visto, con la expresión en fracciones continuas de un número irracional x , vamos a encontrar una sucesión de números racionales que aproximen a este número irracional, porque como acabamos de ver la sucesión de convergentes converge en \mathbb{R} , exactamente a x .

Veamos dos ejemplos para verificar el buen funcionamiento del algoritmo tanto para números racionales como números irracionales.

Ejemplo 2.16 Sea $\frac{p}{q} = \frac{77}{31} \in \mathbb{Q}$. Aplicando el algoritmo anterior, tenemos que $x_0 = \frac{77}{31}$ y que $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor = 2$. Con lo que $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0} = \frac{1}{\frac{77}{31} - 2} = \frac{31}{15}$ y $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = 2$. Finalmente, procediendo de forma similar $x_2 = \frac{15}{1} = 15$ y $a_2 = 15$ con lo que $x_2 - a_2 = 0$ y el algoritmo termina, teniéndose como resultado $\frac{77}{31} = [2; 2, 15]$, es decir,

$$\frac{77}{31} = 2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{15}}$$

Utilizamos la proposición 2.11 y calculamos $\frac{p_0}{q_0} = 2$. En segundo lugar $\frac{p_1}{q_1} = \frac{a_1 p_0 + 1}{a_1} = \frac{2 \cdot 2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$. Finalmente $\frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 p_1 + p_0}{a_2 q_1 + q_0} = \frac{15 \cdot 5 + 2}{15 \cdot 2 + 1} = \frac{77}{31}$.

Ejemplo 2.17 Mostramos el cálculo de la fracción continua de $\sqrt{2}$. Éste es uno de los ejemplos más típicos de representaciones de números en fracciones continuas por ser periódica. $\sqrt{2}$ es un número cuadrático irracional por ser raíz de $x^2 - 2$. Llamamos $x = \sqrt{2}$. Se tiene que

$$(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1 \text{ con lo que } \sqrt{2} = 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{1 + 1 + \frac{1}{1 + \sqrt{2}}}$$

Como vemos a partir del último término hay un patrón que se repite, y podemos asegurar que $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

Por otra parte, queremos ver qué resultado obtenemos aplicando el algoritmo que se ha introducido para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Llamamos $x_0 = \sqrt{2}$ y $a_0 = \lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$. Entonces $x_1 = \frac{1}{x_0 - a_0}$, $a_1 = \left\lfloor \frac{1}{x_0 - a_0} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \right\rfloor = \left\lfloor 1 + \sqrt{2} \right\rfloor = 1 + \lfloor x_0 \rfloor = 2$. De nuevo, $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{2} - 1} - 2} = x_1$, con lo que el algoritmo se repetiría indefinidamente siendo $a_k = 2$ para todo $k \geq 1$ y $\sqrt{2} = [1; 2, 2, 2, \dots]$.

2.3. Relación de las fracciones continuas y el árbol de Farey

Aparentemente, las fracciones continuas y el árbol de Farey son elementos sin relación, sin embargo, las propiedades que cumplen los convergentes nos recuerdan a las propiedades

vistas para los pares de Farey. De hecho, dos convergentes consecutivos de una fracción continua forman un par de Farey. Dado un número racional, nos gustaría saber qué camino tomar en el árbol de Farey para llegar a él. Veamos un ejemplo, utilizando una construcción que aparece en [13].

Ejemplo 2.18 Sea $\frac{5}{7} \in \mathbb{Q}$, tenemos que su expresión en fracciones continuas es $[0; 1, 2, 2]$. Partiendo de 0, y siguiendo la construcción de [13], vamos a dibujar un diagrama de triángulos basándonos únicamente en la expresión en fracciones continuas de $\frac{5}{7}$. Colocamos en el primer vértice superior $\frac{1}{0}$ y en el primer vértice inferior $\frac{0}{1}$. El procedimiento que se sigue consiste en tomar los dos últimos vértices obtenidos y calcular su hijo de Farey, que sería el siguiente vértice. Se podrá hacer una elección a la hora de tomar los hijos de Farey, se podrá fijar un vértice durante un cierto número a_i de pasos de modo que se utilice en todos ellos y después para otros a_{i+1} se fijará el último vértice obtenido en los pasos anteriores. Se elige $\frac{0}{1}$ para utilizarse los a_1 primeros pasos y como $a_1 = 1$, tenemos que el siguiente vértice será la suma de Farey de $\frac{0}{1}$ y $\frac{1}{0}$, es decir, $\frac{1}{1}$. Ahora fijamos $\frac{1}{1}$ y tenemos que $a_2 = 2$, con lo que tomamos dos hijos de $\frac{1}{1}$. En primer lugar, como la última arista obtenida unía $\frac{1}{1}$ y $\frac{0}{1}$, tomamos el vértice $\frac{1}{1} \oplus \frac{0}{1} = \frac{1}{2}$. Ahora, manteniendo el vértice $\frac{1}{1}$, tomamos el siguiente hijo de Farey de $\frac{1}{1}$ y $\frac{1}{2}$, que es $\frac{2}{3}$. Una vez que hemos tomado a_2 hijos, pasamos a fijar el vértice $\frac{2}{3}$, por ser el último obtenido, y continuamos el proceso, esta vez con $a_3 = 2$. Obtenemos en primer lugar el vértice $\frac{3}{4}$ y finalmente $\frac{5}{7}$, como queríamos. El proceso se puede seguir en la figura 2.2.

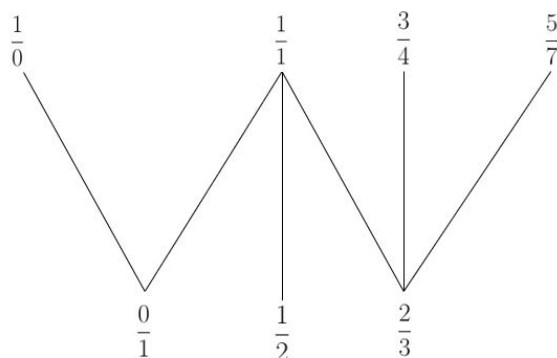


Figura 2.2: $\frac{5}{7}$ obtenido con diagramas de triángulos.

Supongamos que tenemos $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ un número racional no negativo y su fracción continua. Ahora consideremos el árbol de Farey, entre $[x]$ y $[x] + 1$ (o bien entre a_0 y $a_0 + 1$). Si tomamos en el árbol comenzando desde a_0 , tomamos a_1 hijos de modo que siempre se utilice el vértice $\frac{p_0}{q_0} = a_0$, a_2 hijos de modo que siempre se utilice el último vértice obtenido en la anterior iteración, y así hasta llegar a a_n , el último racional obtenido coincidirá con $\frac{p}{q}$. Ilustramos el proceso seguido en el diagrama de triángulos presentado en la figura 2.3. Demostramos el siguiente resultado, basándonos en [1].

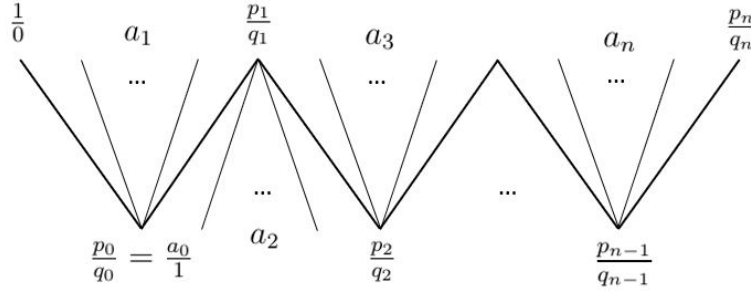


Figura 2.3: Diagrama de obtención de un racional en el árbol de Farey a partir de los coeficientes de la fracción continua.

Proposición 2.19 Sea $\frac{p}{q}$ un número racional y $\frac{p}{q} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, $\frac{p}{q}$ se puede obtener del árbol de Farey partiendo de a_0 como

$$\begin{aligned} \frac{p}{q} &= l^{a_n-1} \dots r^{a_2} l^{a_1} r\left(\frac{a_0}{1}\right) & n \text{ impar.} \\ \frac{p}{q} &= r^{a_n-1} \dots r^{a_2} l^{a_1} r\left(\frac{a_0}{1}\right) & n \text{ par.} \end{aligned} \quad (2.6)$$

Donde cada $l^{a_{2k-1}} \dots r^{a_2} l^{a_1} r(a_0)$ y cada $r^{a_{2k-1}} \dots r^{a_2} l^{a_1} r(a_0)$ son los convergentes pares e impares respectivamente.

Demostración: La justificación de este proceso se sigue de la definición de convergentes presentada en la proposición 2.11 y en la construcción del árbol de Farey, presentada en la primera sección de este capítulo. Partiendo de a_0 , se toma un hijo por la derecha y $a_1 - 1$ por la izquierda, porque según este desarrollo partimos de $\frac{a_0}{1}$, y nos movemos hacia la derecha, $a_0 < \frac{1}{0}$ y después mantenemos el vértice a_0 por la izquierda porque $a_0 < (\frac{a_0}{1} \oplus \frac{1}{0})$. Siguiendo esta construcción, tenemos

$$\frac{1}{0} \oplus \frac{a_0}{1} \oplus \dots \oplus \frac{a_0}{1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

Traducido al árbol de Farey, tenemos $l^{a_1-1} r(a_0) = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$.

Suponiendo que en $n - 1$ pasos se obtiene $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ y en $n - 2$ pasos $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ con caminos en el árbol de Farey $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = l^{a_{n-1}-1} \dots l^{a_1} r(a_0)$ y $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = r^{a_{n-2}-1} l^{a_{n-1}} \dots l^{a_1} r(a_0)$ respectivamente, veamos que en n pasos se obtiene el número que queremos $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$. Supongamos que n es par, luego también lo es $n - 2$ y $n - 1$ es impar. En el árbol de Farey, nos encontramos en el vértice $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Según la construcción, como n es par, necesitamos tomar un hijo por la izquierda y $a_n - 1$ hijos por la derecha de $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Esto se debe a que $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, con lo que necesitamos tomar el primer hijo por la izquierda, mientras que $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \oplus \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, con lo que se tomarán hijos de $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \oplus \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ por la derecha, sucesivamente $a_n - 1$ veces. Con lo que se acaba de explicar, calculamos el número que quedaría en el árbol de Farey

$$x' = \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \oplus \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \oplus \dots \oplus \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}}$$

que coincide exactamente con la expresión del último convergente

$$x' = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$$

En el árbol de Farey hemos tomado $r^{a_n-1}l(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}})$. Con lo que como por hipótesis de inducción $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = l^{a_{n-1}-1} \dots l^{a_1} r(a_0)$, obtenemos $\frac{p}{q} = r^{a_n-1} l^{a_{n-1}} \dots l^{a_1} r(a_0)$.

En el caso de que n sea impar se sigue un razonamiento análogo. □

De la proposición previa obtenemos que la construcción del diagrama de triángulos está relacionado con el árbol de Farey, con lo que para cada número racional no negativo somos capaces de encontrar un camino en el árbol que una a_0 con el racional.

Un número irracional no negativo no aparece en el árbol de Farey, pero sí sus convergentes, con lo que podemos encontrar caminos que converjan al número irracional en cuestión.

Capítulo 3

Geometría hiperbólica

3.1. Postulados de la geometría de Euclides

A lo largo de esta sección nos hemos basado principalmente en el libro [2, Cap. 2] y en [22, Cap. 4]. Muchas de las nociones de geometría utilizadas aparecen en [8–10, 17]. La geometría hiperbólica que va a ser estudiada a lo largo de este documento es una geometría no euclidiana, es decir, una geometría que no cumple uno de los siguientes postulados.

Postulado 3.1 *Los postulados de la geometría euclidiana son los que siguen.*

- I- *Es posible trazar una recta entre dos puntos del plano.*
- II- *Es posible prolongar indefinidamente una recta.*
- III- *Es posible trazar una circunferencia dado un centro y su radio.*
- IV- *Todos los ángulos rectos son iguales entre sí.*
- V- *Dados una recta y un punto exterior a ella, es posible trazar una y solo una recta de modo que esta nueva recta no corte a la dada.*

En la geometría hiperbólica se niega el postulado V de la geometría euclidiana. Existen dos formas diferentes de negar dicho postulado. La primera es que dados una recta r y un punto P exterior a la misma, es imposible que exista otra recta que pase por P y que no corte a la primera. La segunda es que exista más de una recta en esas condiciones. La geometría hiperbólica es aquella en la que se produce la segunda negación presentada de este postulado. Nos vamos a centrar solamente en estudiar modelos de la geometría hiperbólica en dos dimensiones, lo que se conoce como plano hiperbólico.

Definición 3.2 *La **geometría hiperbólica** es aquella que cumple del primer al cuarto postulado presentados en 3.1, pero que sustituye el quinto postulado por este: “para toda recta r y para todo punto exterior P , existen infinitas rectas que no cortan a la primera y que pasan por el punto P ”.*

*El caso particular de que el espacio tenga dos dimensiones es el **plano hiperbólico**.*

En la siguiente sección queremos mostrar distintos modelos de plano hiperbólico.

3.2. Modelos del plano hiperbólico

Se van a presentar distintos modelos del plano hiperbólico. Para el cuarto modelo se hará un estudio en mayor profundidad. Podemos considerar los modelos del plano hiperbólico como subconjuntos de \mathbb{R}^2 o como subconjuntos de \mathbb{C} .

3.2.1. Modelo proyectivo o de Beltrami

Este modelo consiste en el disco unidad abierto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$, identificándose los puntos del interior como puntos en el plano hiperbólico y los de la frontera como los puntos del infinito. Las rectas euclídeas restringidas a este espacio se corresponden con las rectas hiperbólicas. Como nos estamos restringiendo al disco unidad es fácil ver que dado un punto P exterior a una recta r existen infinitas rectas hiperbólicas que no cortan a r y que pasan por P , todas aquellas rectas euclídeas restringidas al disco de Beltrami que pasan por P y cortarían a r fuera del disco, o en uno de los puntos del infinito. Las rectas que pasan por P y cortan a r en uno de los extremos en los que r corta a la circunferencia se llaman rectas paralelas. Las rectas que pasan por P y cortarían a r fuera del disco (o la recta paralela que no cortarían a r) se llaman rectas ultraparalelas. En [6, Cap. 7] encontramos una generalización de la métrica en n dimensiones, la cual podemos escribir en dimensión dos como

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2-y^2} + \frac{x^2}{(1-x^2-y^2)^2} & \frac{xy}{(1-x^2-y^2)^2} \\ \frac{xy}{(1-x^2-y^2)^2} & \frac{1}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{(1-x^2-y^2)^2} \end{pmatrix}$$

Aunque este modelo parece que acota la longitud de las rectas hiperbólicas, contradiciendo el postulado *II* de Euclides, hay que tener en cuenta que la métrica inducida en este modelo dota a las rectas hiperbólicas de longitud infinita.

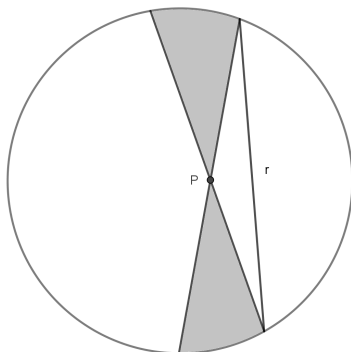


Figura 3.1: Representación de una recta hiperbólica r y un punto dado P por el cual pasan infinitas rectas paralelas.

3.2.2. Modelo del hiperboloide

Este modelo se puede describir directamente como una proyección desde el origen del presentado en la sección precedente sobre una hoja del hiperboloide $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2 - 1, z > 0\}$ cuando el disco se coloca en el plano $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\}$. Las rectas hiperbólicas de este modelo son las correspondientes proyecciones del modelo precedente cuando este se coloca en el plano $z = 1$ centrado en el origen. La proyección de un punto cualesquiera del modelo anterior en el modelo del hiperboloide viene dada por $p(x, y) = (\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}})$. Por tanto, las proyecciones de las rectas son las ramas de una hipérbola. El cálculo de las mismas a partir del modelo anterior consiste en intersectar con el hiperboloide planos que contengan al origen y a las rectas hiperbólicas del modelo del disco de Beltrami. Damos una idea de la representación gráfica de este modelo en la figura 3.2.

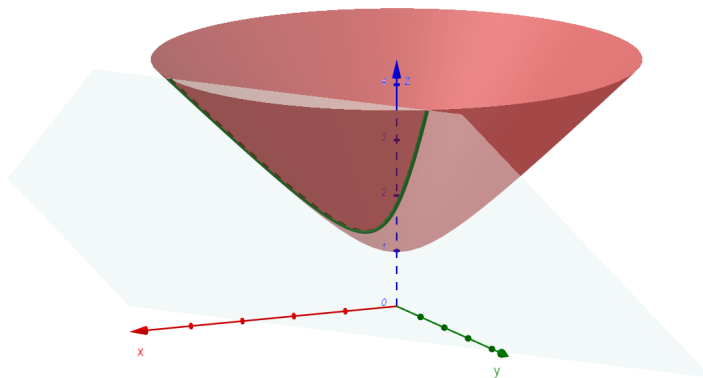


Figura 3.2: Modelo del hiperboloide y la representación de una recta hiperbólica (corte de un plano que pasa por el origen con el hiperboloide).

3.2.3. Modelo del disco de Poincaré

Este modelo también se corresponde con un disco unidad sin la frontera, igual que el modelo de Beltrami. Consideramos la parametrización global siguiente $\mathbf{x} : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{C}$, con $\mathbf{x}(x, y) = x + iy$. Este modelo se denota por $\Delta = \{x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = |z|^2 < 1\}$. La métrica que se considera es distinta a la del modelo proyectivo, con lo cual en este caso las rectas hiperbólicas son diferentes, son arcos de circunferencia que cortan ortogonalmente a los puntos del infinito (los de la frontera) junto con los diámetros del disco (ver [24, sección 6.4]).

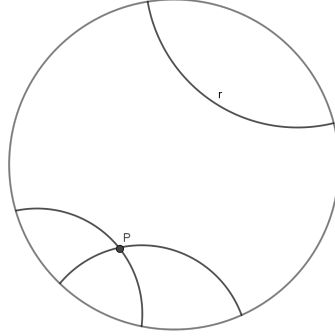


Figura 3.3: Recta hiperbólica r sobre el modelo del disco de Poincaré y un punto exterior a esta P . Se han representado dos de las rectas hiperbólicas que no cortan a r y que pasan por el punto P .

Definición 3.3 Sean $u, v \in T_z\Delta$ dos vectores del espacio tangente en un punto $z = x+iy \in \Delta$, llamamos **producto escalar en el disco** a

$$u \cdot v = \frac{4\langle u, v \rangle}{1 - x^2 - y^2} = \frac{4\langle u, v \rangle}{1 - |z|^2}$$

donde $\langle u, v \rangle$ es el producto escalar usual utilizado en el plano euclídeo. La expresión de la métrica de este modelo es

$$g = \begin{pmatrix} \frac{4}{1-x^2-y^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{1-x^2-y^2} \end{pmatrix}$$

Observación 3.4 El producto escalar está bien definido ya que todos los puntos del disco de Poincaré cumplen que $|z| < 1$.

3.2.4. Modelo del semiplano de Poincaré

Para este modelo existe una parametrización global

$$\mathbf{x} : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\} \longrightarrow \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\},$$

con $\mathbf{x}(x, y) = x + iy$. Lo denotamos como $\mathbb{H}^2 = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im}(z) > 0\}$ y el conjunto $\{z = x + iy : y = 0\}$ se conoce como el conjunto de puntos del infinito.

En este modelo se va a introducir una métrica, que denominaremos hiperbólica, que no es más que una métrica riemanniana definida a partir de un producto escalar distinto del usual. En la figura 3.4 vemos una representación del plano hiperbólico y una muestra visual de la refutación del V postulado de Euclides.

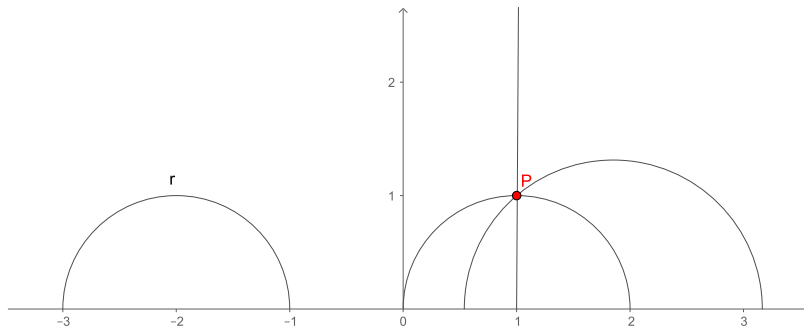


Figura 3.4: Representación en el plano hiperbólico de una recta r , un punto exterior a ella y alguna de las rectas paralelas a r y que pasan por P .

Definición 3.5 Sean $u, v \in T_z\mathbb{H}^2$ dos vectores del espacio tangente de \mathbb{H}^2 en un punto $z = x + iy$, el **producto escalar hiperbólico** se define como

$$u \cdot v = \frac{\langle u, v \rangle}{y^2}$$

donde $\langle u, v \rangle$ es el producto escalar usual, utilizado en el plano euclídeo.

La **norma hiperbólica** se define como

$$\|v\| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}$$

Observación 3.6 El producto escalar hiperbólico está bien definido ya que los puntos con parte imaginaria igual a cero son los puntos en el infinito, con lo cual no pertenecen al plano hiperbólico.

Proposición 3.7 La métrica hiperbólica se expresa para el punto $z = x + iy$ en la base $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$ como sigue

$$g = \begin{pmatrix} \frac{1}{y^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{y^2} \end{pmatrix}$$

Demostración: Identificamos $T_z\mathbb{H}^2$ con \mathbb{R}^2 . Sean $\mathbf{x}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{x}_2 = (0, 1)$, dos vectores linealmente independientes de $T_z\mathbb{H}^2$ en el punto $z = x + iy$.

$$g_{11} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1 = \frac{1}{y^2}; \quad g_{22} = \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2 = \frac{1}{y^2}; \quad g_{12} = g_{21} = \mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$$

□

Una vez que se ha introducido la métrica, vamos a realizar el cálculo de las geodésicas de este modelo.

CÁLCULO DE GEODÉSICAS:

En primer lugar vamos a calcular los símbolos de Christoffel que aparecen explícitamente en el cálculo de geodésicas. La ecuación de las mismas se sigue de (1.9).

Proposición 3.8 *Los símbolos de Christoffel para este modelo de la geometría hiperbólica son:*

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{-1}{y}; \Gamma_{22}^2 = \frac{-1}{y}; \Gamma_{11}^2 = \frac{1}{y},$$

siendo los demás nulos.

Demostración: El cálculo se sigue de la expresión $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^2 g^{lk} \left[\frac{\partial g_{il}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^l} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial u^i} \right]$, obtenida en la ecuación (1.6).

Tenemos que $g^{-1} = \begin{pmatrix} y^2 & 0 \\ 0 & y^2 \end{pmatrix}$. Llamamos $x = u^1$ e $y = u^2$. Mostramos el cálculo de dos de ellos, Γ_{11}^1 y Γ_{11}^2 , los demás se pueden obtener de forma similar.

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} \left(g^{11} \left[\frac{\partial(1/y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(1/y^2)}{\partial x} + \frac{\partial(1/y^2)}{\partial x} \right] + 0 \right) = 0 \\ \Gamma_{11}^2 &= \frac{1}{2} \left(0 + g^{22} \left[0 - \frac{\partial(1/y^2)}{\partial y} + 0 \right] \right) = \frac{1}{2} y^2 \left(-\frac{2}{y^3} \right) = \frac{1}{y} \end{aligned}$$

□

Para el cálculo de las geodésicas vamos a considerar curvas parametrizadas por la longitud de arco. Teniendo en cuenta la parametrización local \mathbf{x} , podemos escribir la curva contenida en la superficie como $\gamma(s) = \mathbf{x}(x(s), y(s)) = x(s) + iy(s)$. Utilizando las expresiones obtenidas para los símbolos de Christoffel, la ecuación 1.9 y la condición de parametrización por la longitud de arco, obtenemos las siguientes ecuaciones

$$x'' + 2 \frac{-1}{y} \cdot x' \cdot y' = 0 \quad (3.1)$$

$$y'' - \frac{1}{y} \cdot (-(x')^2 + (y')^2) = 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{(x')^2 + (y')^2}{y^2} = 1 \quad (3.3)$$

Vamos a distinguir dos casos, que $x' = 0$ y $x' \neq 0$.

- $x' = 0$. En ese caso $x = C$, es constante. Sustituyendo en (3.2) obtenemos $y'' = \frac{(y')^2}{y}$ luego $\ln(y') = \ln(y) + D$ y por lo tanto $y(s) = e^{Es+F}$. Con lo que en este caso se tendría

$$\gamma(s) = (x(s), y(s)) = (C, e^{Es+F}) \quad (3.4)$$

Falta por comprobar que se cumple la ecuación (3.3). Para que se cumpla esta ecuación, $1 = \frac{E^2 e^{2Es+2F}}{e^{2Es+2F}}$. Entonces, $E^2 = 1$.

- $x' \neq 0$. Si tenemos en cuenta que $\frac{d}{ds} \left(\frac{x'}{y^2} \right) = \frac{x'' y^2 - x' 2y y'}{y^4}$. Sustituyendo en (3.1), tenemos que $\frac{d}{ds} \left(\frac{x'}{y^2} \right) = 0$, y que por tanto $x' = C y^2$. Como ya se ha estudiado el caso $C = 0$, supongamos que $C \neq 0$. Sustituyendo en (3.3), $C^2 y^4 + (y')^2 = y^2$ y por lo tanto

$y' = y\sqrt{1 - C^2 y^2}$. Por otra parte, $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{ds} \frac{ds}{dx} = \frac{\sqrt{1 - C^2 y^2}}{Cy}$, con lo que obtenemos la expresión $dy \cdot \frac{Cy}{\sqrt{1 - C^2 y^2}} = dx$ que implica que

$$x - a = \frac{\sqrt{1 - C^2 y^2}}{C},$$

es decir,

$$(x - a)^2 + y^2 = \frac{1}{C^2} \quad (3.5)$$

Esta expresión se corresponde con la de una semicircunferencia centrada en algún punto $(a, 0)$ de la recta que se corresponde con los puntos al infinito, $y = 0$, y cuyo radio es $\frac{1}{C}$.

En la obtención de las geodésicas no hemos utilizado la ecuación (3.2). Para establecer que las geodésicas del plano hiperbólico son las semicircunferencias centradas en puntos al infinito, falta por comprobar que efectivamente corroboran la ecuación (3.2).

Tenemos que $y' = \frac{dy}{ds} = \sqrt{y^2 - C^2 y^4}$, por tanto la expresión de y'' es:

$$\begin{aligned} y'' &= \frac{d}{ds}(\sqrt{y^2 - C^2 y^4}) = \frac{1}{2}(y^2 - C^2 y^4)^{-1/2}(2yy' - 4C^4 y' y^3) \\ &= \frac{1}{2y'}(2yy' - 4C^4 y' y^3) = y - 2C^2 y^3 \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que sustituyendo en la ecuación (3.2) obtenemos

$$y'' = \frac{1}{y} \cdot (-(x')^2 + (y')^2) = \frac{1}{y}(-C^2 y^4 + y^2 - C^2 y^4) = y - 2C^2 y^3$$

como queríamos.

Concluimos que las geodésicas en el modelo del semiplano de Poincaré vienen dadas por las ecuaciones (3.4) y (3.5), que son respectivamente las semirrectas verticales y las semicircunferencias centradas en algún punto $(a, 0)$ de la recta real con radio $\frac{1}{C}$, $C > 0$.

Una vez que se tienen las geodésicas, se puede definir la noción de triángulo hiperbólico. Un **triángulo hiperbólico** en el semiplano de Poincaré es el polígono definido por tres geodésicas en \mathbb{H}^2 que se cortan dos a dos o bien en el interior de \mathbb{H}^2 o bien en los puntos del infinito, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Si todos los puntos de corte de las geodésicas que definen un triángulo hiperbólico están en $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, se dice que es un **triángulo ideal**. Calculemos el área de un triángulo especial a lo largo de este trabajo.

Proposición 3.9 *El área del triángulo con vértices $0, 1$ y ∞ es exactamente π .*

Demostración: Llamamos a este triángulo t_b , cuyas aristas son las líneas verticales en 0 , en 1 y la semicircunferencia superior de ecuación $(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$. Para calcular el área de este triángulo se hará uso de la ecuación 1.4.

$$\begin{aligned} \int \int_{t_b} \frac{dx dy}{y^2} &= \int_0^1 \int_{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2}} dx \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \frac{2}{\sqrt{1 - (2w)^2}} dw = [\arcsin(2w)]_{-1/2}^{1/2} = \pi \end{aligned}$$

□

3.3. Aplicaciones $T : \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^2$

En esta sección buscamos aplicaciones que llevan el plano hiperbólico en sí mismo, es decir, que dado un punto $P \in \mathbb{H}^2$, se tenga que $T(P) \in \mathbb{H}^2$. Un grupo conocido es el de las transformaciones de Möbius, que son aplicaciones que llevan puntos de \mathbb{C} en sí mismo. Estudiaremos la recta compleja extendida $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ porque tendremos en cuenta el infinito como un punto. En el apéndice A se pueden encontrar algunos resultados sobre grupos lineales y transformaciones de Möbius.

Definición 3.10 Una **transformación de Möbius** es una aplicación $T : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ dada por $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ de modo que $ad - bc \neq 0$. Por convenio se tiene que $T(\infty) = \frac{a}{c}$, $T(-d/c) = \infty$. En el caso de que $c = 0$ se tiene que $T(\infty) = \infty$.

Observación 3.11 Podemos considerar las transformaciones de Möbius como proyectividades de la recta compleja proyectiva en sí misma.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 & \longrightarrow & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ [z_0 : z_1] & \longrightarrow & [az_0 + bz_1 : cz_0 + dz_1] \end{array}$$

Tomando el abierto: $U = \{[z : 1] : z \in \mathbb{C}\}$ se tiene que $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 = U \cup \{[1 : 0]\} = \mathbb{C} \cup \{P_{\infty}\}$. De este modo, que podemos escribir las transformaciones de Möbius como sigue:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 & \xrightarrow{T} & \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \\ [z : 1] & \mapsto & [\frac{az+b}{cz+d} : 1] \\ [1 : 0] & \mapsto & [a : c] \end{array}$$

Relacionando esta notación con la usual, llegamos a la conclusión de que el punto del infinito se puede escribir como $1/0$.

Observemos que las transformaciones de Möbius vistas como proyectividades de la recta compleja en sí misma aportan una nueva prueba a la proposición A.8, según la cual el grupo de transformaciones de Möbius está en biyección con $PGL(2, \mathbb{C})$.

De las transformaciones de Möbius se tienen algunos resultados conocidos, presentados en [4, 18]. Estas transformaciones llevan circunferencias de cualquier radio en otras circunferencias o rectas. Del mismo modo estas transformaciones llevan rectas en otras rectas o en circunferencias. Además, son transformaciones conformes, que preservan ángulos. Vamos a probar algunas propiedades que nos serán útiles en el capítulo 4.

Proposición 3.12 Las transformaciones de Möbius llevan circunferencias o rectas en otras circunferencias o rectas.

Demostración: Seguimos un desarrollo similar al de [22]. En primer lugar, como hemos explicado en la observación 3.11, consideramos las transformaciones de Möbius como transformaciones de la recta proyectiva compleja en sí misma y por las proposiciones A.8 y A.9, podemos trabajar con las transformaciones que cumplen $ad - cb = 1$. Consideremos $z = x + iy$ en \mathbb{C} . La ecuación de una circunferencia es:

$$A(x^2 + y^2) + B'x + C'y + D = 0 \quad \text{con } A, B', C', D \in \mathbb{R}$$

Notemos que cuando $A = 0$, lo que se tiene es la ecuación de una recta. Por otro lado, $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ e $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$ y podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$Az\bar{z} + \frac{B' - C'i}{2}z + \frac{B' + C'i}{2}\bar{z} + D = Az\bar{z} + Bz + C\bar{z} + D = 0,$$

donde $C = \bar{B}$. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ una transformación de Möbius, y sea la transformación inversa: $T^{-1}(t) = \frac{dt-b}{-ct+a}$. Supongamos que $z = T^{-1}(t)$. Utilizando las propiedades de los números complejos: $\overline{s+r} = \bar{s} + \bar{r}$ y $\overline{s\bar{r}} = \bar{s} r$, tenemos que $\bar{z} = \frac{\bar{d}\bar{t}-\bar{b}}{-\bar{c}\bar{t}+\bar{a}}$. Sustituimos en la ecuación de la circunferencia para ver si la ecuación que nos queda en términos de t y de \bar{t} tiene las características de una circunferencia. Escribimos la ecuación una vez se han reagrupado los términos

$$\begin{aligned} & (A\bar{d}\bar{d} - B\bar{d}\bar{c} - \bar{B}\bar{d}c + D\bar{c}\bar{c})\bar{t}\bar{t} + (-A\bar{d}b + B\bar{a}d + \bar{B}\bar{b}c - D\bar{a}c)t + \\ & (-A\bar{d}b + B\bar{c}b + \bar{B}\bar{d}a - D\bar{a}c)\bar{t} + (A\bar{b}\bar{b} - B\bar{a}b - \bar{B}a\bar{b} + Da\bar{a}) = 0 \end{aligned}$$

Observemos que se tiene una ecuación del tipo

$$A_1\bar{t}\bar{t} + B_1t + \bar{B}_1\bar{t} + D_1 = 0 \tag{3.6}$$

Se tiene que el coeficiente que acompaña a $\bar{t}\bar{t}$ y el término independiente son reales. Además los coeficientes que acompañan a t y a \bar{t} son conjugados. Por tanto, la imagen de una circunferencia es otra circunferencia o una recta. En el caso de que se anule el coeficiente que acompaña a $\bar{t}\bar{t}$, tenemos que la ecuación (3.6) es la ecuación de una recta, es decir, si $A_1 = A\bar{d}\bar{d} - B\bar{d}\bar{c} - \bar{B}\bar{d}c + D\bar{c}\bar{c} = 0$ \square

Podemos buscar endomorfismos de \mathbb{H}^2 entre algunos de los subgrupos de las transformaciones de Möbius. Vamos a poner condiciones a las transformaciones de Möbius para que lleven puntos de \mathbb{H}^2 en otros puntos de \mathbb{H}^2 y además lleven puntos del infinito $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ en otros puntos del infinito. Para la descripción de las transformaciones de Möbius que actúan en el semiplano superior vamos a utilizar lenguaje de grupos lineales, introducidos en el apéndice A.

Teorema 3.13 *Una transformación de Möbius deja invariante a \mathbb{H}^2 si, y solo si se puede escribir de la forma $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$.*

Demostración: Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ cualquier transformación de Möbius que deja \mathbb{H}^2 invariante. Veamos las condiciones que verifica T si lleva cualquier número real en otro número

real. Vamos a partir del grupo de transformaciones $PSL(2, \mathbb{C})$, isomorfo al grupo de transformaciones de Möbius, tal y como mostramos en las proposiciones A.8 y A.9. Evaluamos primero los casos de que $z_1 = 0$ y $z_2 = \infty$.

$$T(z_1) = b/d \in \mathbb{R}; T(z_2) = a/c \in \mathbb{R}$$

Tenemos como casos especiales aquellos en los que $c = 0$, en los cuales $T(z_2) = \infty$ y aquellos en los que $d = 0$, que mandan el cero a ∞ . Dividimos la demostración en tres casos distinguidos, $c = 0$, $d = 0$ y $c, d \neq 0$. Evidentemente el caso en el que $c = 0$ y $d = 0$ al mismo tiempo, no se puede dar porque estamos trabajando con transformaciones de Möbius, para las que se cumple $ad - cb \neq 0$.

- En el primero de los casos, $T(\infty) = \infty$ y $T(0) = \frac{b}{d} \in \mathbb{R}$. Se tiene que $0 \in \mathbb{R}$, la frontera de nuestro espacio, luego se quiere que su imagen esté en uno de los puntos de la frontera: $T(0) = \lambda \in \mathbb{R}$, $b = \lambda d$. Análogamente, $T(1) = \frac{a+b}{d} = \mu \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$. Luego, podemos escribir el coeficiente a en función del coeficiente d : $a + \lambda d = \mu d$, despejando, $a = (\mu - \lambda)d$. Escribimos entonces la transformación inicial expresando todos los coeficientes en función de uno solo, obteniendo $T(z) = \frac{(\lambda - \mu)zd + \lambda d}{d} = (\lambda - \mu)z + \lambda$, es decir, todos los coeficientes son números reales. Si ahora dividimos entre la raíz cuadrada del determinante de la transformación vista como una matriz de $PSL(2, \mathbb{C})$, que coincide con $k = \sqrt{\lambda - \mu} \neq 0$, distinto de cero porque si no, no podría ser una transformación de Möbius. Tenemos que

$$T(z) = \frac{\left(\frac{\lambda - \mu}{k}\right)z + \lambda/k}{1/k},$$

con lo cual los nuevos coeficientes cumplen $a'd' - b'c' = 1$, tal como se quería demostrar.

- En el segundo de los casos se puede seguir un desarrollo similar al anterior.
- En el resto de casos, si $c \neq 0$ y $d \neq 0$ como $T(0), T(\infty) \in \mathbb{R}$, $a = \lambda c$ y $b = \mu d$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Como estamos trabajando con una transformación de Möbius, tenemos que $\lambda cd - \mu cd \neq 0$, con lo que $\mu \neq \lambda$. Ahora, si evaluamos la función en un punto del eje real, sabiendo que su imagen también debe ser real: $T(1) = \frac{a+b}{c+d} = \gamma \in \mathbb{R}$, llegamos a que todos los coeficientes tienen que ser múltiplos reales de solo uno de ellos. Más precisamente, tenemos

$$T(1) = \frac{\lambda c + \mu d}{c + d} = \gamma \in \mathbb{R}$$

luego, $(\lambda - \gamma)c = (\gamma - \mu)d$, teniendo en cuenta que $c \neq 0, d \neq 0$ y que $\mu \neq \lambda$, se tiene que $c = \frac{\gamma - \mu}{\lambda - \gamma}d$. Hemos escrito todos los coeficientes en función de d , es por eso que tenemos que dividiendo entre d al numerador y al denominador llegamos a una expresión de la transformación de Möbius T con coeficientes reales:

$$T(z) = \frac{\lambda \frac{\gamma - \mu}{\lambda - \gamma} z + \mu}{\frac{\gamma - \mu}{\lambda - \gamma} z + 1}.$$

Además, procediendo como en el caso de $c = 0$, si dividimos entre la raíz cuadrada del determinante tenemos que nuevos coeficientes que son a', b', c', d' y que cumplen $a'd' - b'c' = 1$

Recíprocamente, supongamos que tenemos $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y $ad - bc = 1$. Si tenemos un punto $z \in \mathbb{R}$ su imagen $T(z) \in \mathbb{R}$ o $T(z) = \infty$, luego T lleva la recta del infinito en sí misma. Por otra parte, veamos cuál es el comportamiento respecto de los puntos del interior del plano hiperbólico. Si tenemos una aplicación de la forma presentada y $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$, es decir, $y > 0$ su imagen es $T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}^2$, la cual reescribimos: $T(z) = \frac{(xa+b)+iya}{(xc+d)+yic}$. Si multiplicamos por el conjugado del denominador tanto al numerador como al denominador, en el denominador obtendremos un número real estrictamente mayor que cero. Evaluando sólo la parte imaginaria del numerador: $ya(xc + d) - yc(xa + b) = yx(ac - bc) + y(ad - bc) = y > 0$, luego se tiene que $\text{Im}(T(z)) > 0$ y que por tanto $T(z) \in \mathbb{H}^2$. \square

Lo que hemos demostrado es que el grupo de transformaciones que deja invariante al plano hiperbólico es $PSL(2, \mathbb{R})$.

Proposición 3.14 *Una transformación de Möbius de $PSL(2, \mathbb{R})$ lleva rectas verticales en otras rectas o semicircunferencias centradas en \mathbb{R} .*

Demostración: Siguiendo la notación vista en la proposición 3.12, una recta vertical tiene ecuación

$$z + \bar{z} + D = 0$$

Si consideramos una transformación de Möbius $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ en $PSL(2, \mathbb{R})$, $T^{-1}(t) = \frac{dt-b}{-ct+a}$. Luego la imagen de la recta anterior por esta transformación es

$$\frac{dt-b}{-ct+a} + \frac{d\bar{t}-b}{-c\bar{t}+a} + D = 0$$

que podemos escribir

$$(-2cd + c^2D)t\bar{t} + (ad + bc - caD)(t + \bar{t}) + (-2ab + a^2D) = 0$$

De este modo se tiene una recta vertical si $c = 0$ o si $D = \frac{2d}{c}$. En otro caso, obtenemos una semicircunferencia centrada en \mathbb{R} , porque observamos que el coeficiente de y es cero y por tanto encontramos que la semicircunferencia está centrada en el punto $\left(\frac{ad+bc-aD}{2c(cD-2d)}, 0\right)$. \square

A la vista de la proposición anterior y de la 3.12, parece que los elementos de $PSL(2, \mathbb{R})$ son isometrías porque llevan geodésicas en geodésicas, pero comprobemos que realmente lo son.

Proposición 3.15 *Una transformación de Möbius en $PSL(2, \mathbb{R})$ en \mathbb{H}^2 es una isometría.*

Demostración: Seguimos [24, Cap. 4]. Sea $\gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{H}^2$ una curva definida en el semiplano de Poincaré. Para ver que una transformación de Möbius T es una isometría, basta con ver que la longitud de la transformada de una curva coincide con la longitud de

la curva original. La curva que se obtiene una vez aplicada la transformación es $T \circ \gamma : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{H}^2$. Calculemos la longitud de la curva transformada mediante la expresión dada en (1.3). Para ello será necesario calcular la parte imaginaria de un punto $T(z)$ por una transformación de Möbius, conociendo la parte imaginaria de z . Si $z = x + iy$ y llamamos $Im(z) = y$. Sea $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, entonces

$$\begin{aligned} Im(T(z)) &= Im\left(\frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d}\right) = Im\left(\frac{(a(x+iy)+b)(c(x-iy)+d)}{|c(x+iy)+d|^2}\right) \\ &= \frac{ad-bc}{|c(x+iy)+d|^2}y = \frac{1}{|cz+d|^2}Im(z) \end{aligned}$$

Además, $T'(z)$ se expresa como

$$T'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}$$

luego tenemos que

$$\begin{aligned} long((T \circ \gamma)(t)) &= \int_{\alpha}^{\beta} \|(T \circ \gamma)'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|(T \circ \gamma)'(t)|}{Im((T \circ \gamma)(t))} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|T'(\gamma(t))| \cdot |\gamma'(t)|}{Im((T \circ \gamma)(t))} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\gamma'(t)| \cdot |c\gamma(t)+d|^2}{|c\gamma(t)+d|^2 \cdot Im(\gamma(t))} dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{|\gamma'(t)|}{Im(\gamma(t))} dt = long(\gamma(t)) \end{aligned}$$

□

Además, las transformaciones de Möbius preservan los ángulos entre vectores porque dada una transformación de Möbius T , se tiene $T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, que no se anula en ningún punto de \mathbb{H}^2 .

Proposición 3.16 Si $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ forman un par de Farey, la transformación $T = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$ lleva

- El eje imaginario \mathbb{I} a la geodésica que une $\frac{p}{q}$ con $\frac{r}{s}$.
- La recta vertical $x = 1$ (o bien $z + \bar{z} = 2$) en la geodésica que une $\frac{p}{q}$ con $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$.
- La geodésica $2x^2 + 2y^2 - x - y = 0$ (o bien $2z\bar{z} - (z + \bar{z}) = 0$) que une 0 y 1 en la geodésica que une $\frac{r}{s}$ con $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$.

Demostración: Consideramos la transformación $T = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$, tenemos

- En primer lugar, el eje imaginario \mathbb{I} tiene como imagen la geodésica que une $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$. Esto es porque $T(0) = \frac{r}{s}$ y $T(\infty) = \frac{p}{q}$ y T es una isometría que lleva geodésicas en geodésicas. La única geodésica que une $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ es

- Si $\frac{p}{q} = \infty$ ó $\frac{r}{s} = \infty$, se tiene que la única geodésica que los une es la recta vertical $x = \frac{r}{s}$ en el primer caso o $x = \frac{p}{q}$ en el segundo.
- La semicircunferencia que une $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ centrada en el punto $\left(\frac{ps+qr}{2qs}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2qs}$.

$$\left(x - \frac{ps+qr}{2qs}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4q^2s^2}$$

- La recta vertical $x = 1$ tiene como imagen la geodésica que une $\frac{p}{q}$ y $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ porque $T(\infty) = \frac{p}{q}$ y $T(1) = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ y por el mismo argumento que antes, T es una isometría y lleva la geodésica que tiene por extremos 1 y ∞ la que tiene por extremos $T(1)$ y $T(\infty)$. La geodésica que une $\frac{p}{q}$ y $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ es
 - Si $\frac{p}{q} = \infty$ ó $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \infty$, tenemos que la única geodésica que los une es la recta vertical $x = \frac{p}{q}$ en el primer caso y $x = \frac{p}{q}$ en el segundo.
 - La semicircunferencia que une $\frac{p}{q}$ y $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$, de centro $\left(\frac{ps+qr+2pq}{2q(q+s)}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2(q+s)q}$.

$$\left(x - \frac{ps+qr+2pq}{2q(q+s)}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4(q+s)^2q^2}$$

- Finalmente, la semicircunferencia que une 0 y 1 tiene como imagen la geodésica que une $\frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ por el mismo argumento que en los otros dos casos y conociendo que $T(1) = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ y que $T(0) = \frac{r}{s}$. La geodésicas que une $\frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ es
 - Si $\frac{r}{s} = \infty$ ó $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \infty$, la única geodésica que los une es $x = \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ en el primer caso y $x = \frac{r}{s}$ en el segundo.
 - La semicircunferencia de centro $\left(\frac{2sr+sp+rq}{2(q+s)s}, 0\right)$ y radio $\frac{1}{2s(q+s)}$

$$\left(x - \frac{2sr+sp+rq}{2(q+s)s}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4(q+s)^2s^2}$$

□

En la anterior proposición hemos estudiado el comportamiento de las geodésicas que forman un triángulo ideal bajo ciertas transformaciones de $PSL(2, \mathbb{Z})$. En la figura 3.5 ilustramos el comportamiento del triángulo básico bajo una transformación $T = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$.

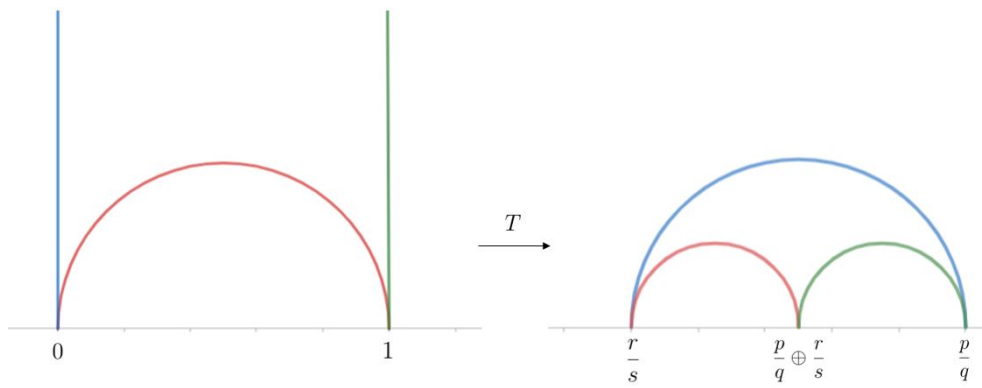


Figura 3.5: Transformación del triángulo de vértices 0, 1 e ∞ por una transformación T . El lado que une 0 e ∞ está coloreado en azul, así como su transformado. De igual forma coloreamos los lados que unen 0 y 1 y 1 e ∞ y sus transformados.

Capítulo 4

Teselaciones de Farey

4.1. Teselaciones

Una idea de teselación es, por ejemplo, la de un mosaico. En él tenemos las teselas, que son polígonos pegados por los bordes unos con otros pero cuyos interiores son disjuntos. En esta sección se va a tratar la teselación de Farey que recubre el plano hiperbólico. Hemos seguido la construcción de la teselación de Farey de [23] y hemos utilizado nociones presentadas en [2, cap. 6,8].

Definición 4.1 Sea P el plano euclídeo, hiperbólico o una esfera. Una **teselación** es una familia $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde cada X_m se conoce como tesela, que cumple:

- I- Cada X_m es un polígono conexo.
- II- Dados cualesquiera X_n y X_m son isométricos.
- III- $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = P$
- IV- $X_m \cap X_n$ o bien es únicamente uno de sus vértices de X_m y X_n o bien uno de sus lados o el vacío.
- V- Para todo $p \in P$, existe $\varepsilon > 0$, de modo que la bola $B(p, \varepsilon)$ interseca a un número finito de teselas.

4.2. Construcción de la teselación de Farey

Vamos a mostrar la forma que tiene la teselación de Farey (figura 4.1), relacionándola con el árbol de Farey visto en el Capítulo 2 de este trabajo. La vamos a construir sobre el modelo del semiplano de Poincaré y después faltaría por ver que en efecto es una teselación.

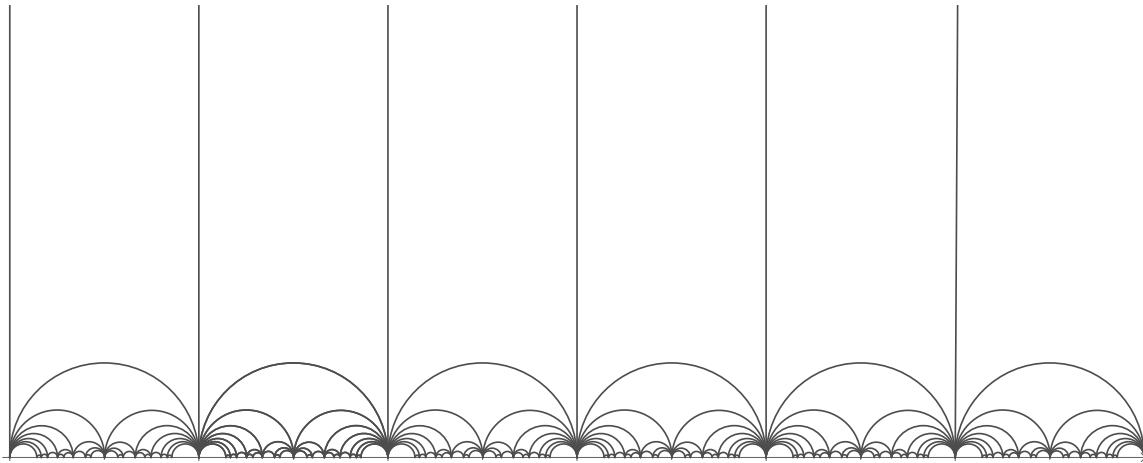
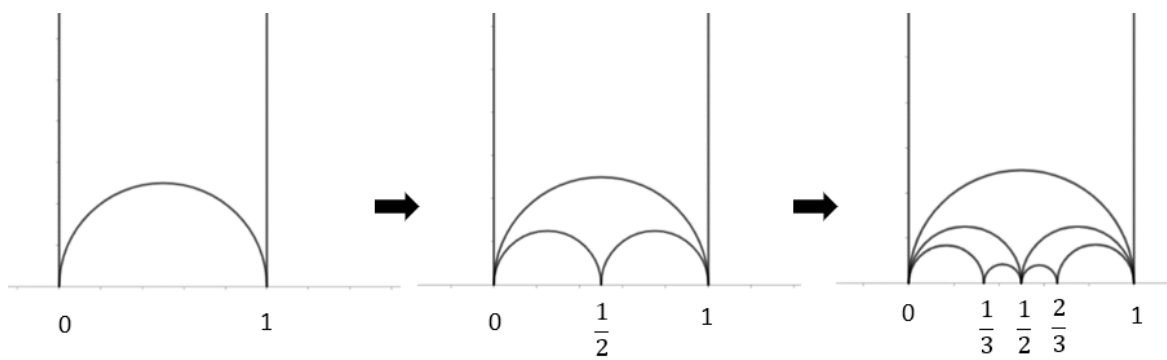


Figura 4.1: Teselación de Farey.

ALGORITMO DE CONSTRUCCIÓN DE LA TESELACIÓN DE FAREY:

1. Primero dibujamos líneas verticales partiendo de todo $n/1 \in \mathbb{Z}$
2. Unimos todos los $n/1$ con los $(n+1)/1$ utilizando una geodésica, es decir, como ya hemos visto anteriormente, una semicircunferencia.
3. Marcamos los puntos $n/1 \oplus (n+1)/1$ y los unimos con $n/1$ y con $(n+1)/1$ mediante arcos de semicircunferencia.
- m. Procedemos inductivamente de forma que dados dos números racionales p/q y r/s ya unidos por un arco, calculamos $p/q \oplus r/s$ y lo unimos a los dos números anteriores.

Figura 4.2: Primeros pasos de la construcción de la teselación de Farey, restringiéndonos a $[0, 1]$ en la recta real.

El resultado de esta construcción consiste en la teselación de Farey, formada a partir de triángulos hiperbólicos.

Observación 4.2 Las rectas verticales que se trazan en el primer paso unen a todos los enteros con el infinito. Los enteros $\frac{n}{1}$ y $\frac{1}{0}$, que podemos identificar con ∞ como presentamos en la observación 3.11, forman un par de Farey ya que cumplen $0 \cdot n - 1 = -1$.

Lema 4.3 Si p/q y r/s en \mathbb{Q} forman un par de Farey y $T \in PSL(2, \mathbb{Z})$, se tiene que $T(p/q)$ y $T(r/s)$ forman un par de Farey.

Demostración: Consideremos una transformación $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PSL(2, \mathbb{Z})$, es decir, $ad - bc = 1$. Los elementos p/q y r/s forman un par de Farey, luego $ps - qr = 1$. Sean $T(p/q) = \frac{ap+bq}{cp+dq}$ y $T(r/s) = \frac{ar+bs}{cr+ds}$ sus imágenes. Entonces $T(p/q)$ y $T(r/s)$ forman un par de Farey porque

$$(ap + bq)(cr + ds) - (ar + bs)(cp + dq) = (ad - bc)(ps - qr) = 1.$$

□

Notemos que la construcción de la teselación de Farey está estrechamente relacionada con la construcción del árbol de Farey. De hecho vamos a probar que los vértices de los triángulos son exactamente todos los números racionales.

Todo punto de \mathbb{H}^2 está en alguno de los triángulos, lo cual se deduce por construcción de la teselación. Vamos a conocer las transformaciones que dejan invariante a la teselación de Farey. Ya hemos visto en la sección previa que grupo de isometrías de \mathbb{H}^2 es $PSL(2, \mathbb{R})$. Llamaremos **triángulo básico** al triángulo cuyos vértices son los puntos 0 , 1 e ∞ , dibujado en la figura 4.3.

Como hemos visto en la proposición 3.16 y en la figura 3.5, una aplicación que manda al triángulo básico en cualquier otro de la teselación es la que manda el ∞ a p/q , 0 a s/t y el 1 a $p/q \oplus_F r/s$. Su representación en forma matricial viene dada por $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$. Con este tipo de transformación se llega a que se puede encontrar una transformación que lleve cualquier triángulo de la teselación en otro.

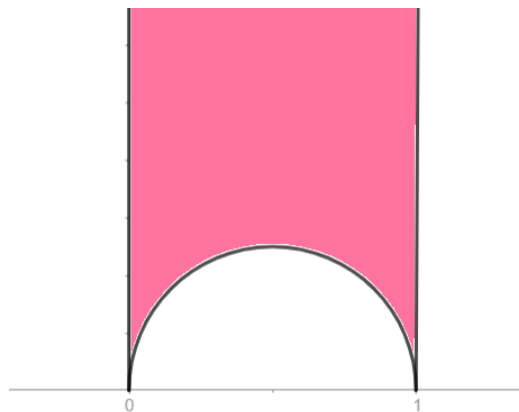


Figura 4.3: Triángulo básico cuyos lados son geodésicas en el plano hiperbólico y sus vértices son 0 , 1 y ∞ .

Proposición 4.4 *Dados dos triángulos de la teselación, existe una transformación en el grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$ que manda un triángulo en otro.*

Demostración: Sean dos números racionales $p/q > r/s$ que forman un par de Farey. Sabemos que en este caso la transformación $T = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ pertenece al grupo $PSL(2, \mathbb{Z})$, porque su determinante es igual a la unidad y sus coeficientes pertenecen a \mathbb{Z} . La imagen de 0 es r/s , la de ∞ es p/q y la de 1 es $p/q \oplus_F r/s$.

Este tipo de transformaciones llevan a los números racionales en otros números racionales o el infinito. Además, por ser isometrías llevan las geodésicas en geodésicas, es decir los lados de un triángulo en los lados de otro triángulo que unen a las imágenes de los vértices. Sea otro triángulo de la teselación cuyos vértices son a/b , c/d y su suma de Farey. Una transformación que lleva al primer triángulo dado en el segundo sería:

$$T = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}^{-1} \in PSL(2, \mathbb{Z}) \quad \square$$

De hecho, deducimos el siguiente resultado.

Proposición 4.5 *Dado un triángulo cualesquiera de la teselación de Farey, su imagen por cualquier transformación de $PSL(2, \mathbb{Z})$ será otro triángulo de la misma.*

Demostración: Dado un triángulo de la teselación de Farey, cuyos vértices son $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$, por el lema 4.3 se tiene que las imágenes por cualquier transformación de $PSL(2, \mathbb{Z})$ de $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s}$ forman también un par de Farey y se puede calcular su suma de Farey, que de hecho se comprueba de forma directa que es $T \left(\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} \right) = \frac{a(p+r)+b(q+s)}{c(p+r)+d(q+s)} = \frac{(ap+bq)+(ar+bs)}{(cp+dq)+(cr+ds)} = T \left(\frac{p}{q} \right) \oplus T \left(\frac{r}{s} \right)$. Por tanto, la imagen de los vértices de un triángulo de la teselación serán los vértices de otro triángulo y la imagen de los lados del triángulo serán las geodésicas que unen las imágenes de los vértices. \square

Observación 4.6 *Notemos que los triángulos de esta teselación son isométricos, porque en la proposición 3.9 se ha probado que el área del triángulo básico es π y todos los demás pueden ser vistos como imágenes por una isometría de dicho triángulo.*

Proposición 4.7 *Todo par de racionales que son pares de Farey son vértices de uno de los lados de alguna tesela de la teselación de Farey.*

Demostración: Basta con tomar dos números racionales $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ que sean pares de Farey y la transformación $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$ que lleva el triángulo básico en uno que tiene como dos de sus vértices los dados y el tercero su suma de Farey. Encontramos un esquema de esta transformación en la figura 3.5 en el capítulo 3. \square

Lema 4.8 *Dada una geodésica γ que forma parte de un lado de una tesela de la teselación de Farey, existe una transformación $T \in PSL(2, \mathbb{Z})$ tal que $T(\mathbb{I}) = \gamma$.*

Demostración: Veamos que existen tres transformaciones que mantienen invariante el triángulo básico, es decir que transforman los vértices de este triángulo unos en otros. Estas son:

- La identidad.
- La transformación de $PSL(2, \mathbb{Z})$ que manda el 0 al 1, el 1 al ∞ y el ∞ a 0, es decir $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
- La que manda el 1 al 0, el 0 a ∞ y el ∞ al 1 es $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Además, por la demostración de la proposición 4.4, encontramos transformaciones que llevan el triángulo básico a cualquier otro triángulo de la teselación, con lo que las geodésicas que forman los lados del triángulo básico se transforman en las geodésicas de la imagen del triángulo básico. Entonces, si tenemos un triángulo de la teselación de vértices $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ y su suma de Farey, obtenemos de forma directa que las tres geodésicas que forman sus lados son imágenes de \mathbb{I} por alguna de estas tres aplicaciones:

- $T_1 = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix}$
- $T_2 = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$
- $T_3 = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

□

Lema 4.9 *Dadas dos geodésicas distintas γ_1 y γ_2 en la teselación de Farey, su intersección es vacía.*

Demostración: Dadas dos geodésicas cualesquiera, por el lema 4.8, pueden ser vistas como imágenes del eje imaginario \mathbb{I} , luego probar que $T_1(\mathbb{I}) \cap T_2(\mathbb{I}) = \emptyset$, para $T_1, T_2 \in PSL(2, \mathbb{Z})$ equivale a probar que $\mathbb{I} \cap T(\mathbb{I}) = \emptyset$, con $T \in PSL(2, \mathbb{Z})$. Supongamos que las geodésicas tienen dos puntos de intersección, entonces, como la geodésica que une dos puntos cualesquiera es única, solo cabe la posibilidad de que las dos geodésicas sean la misma. Luego, como mucho las dos geodésicas pueden tener un único punto de corte. Si $T(\mathbb{I})$ es una geodésica de la teselación de Farey, sus vértices son números racionales o el infinito. La única forma de que se produzca un corte de $T(\mathbb{I})$ con el eje imaginario es que sus vértices cumplan $\frac{a}{b} > 0 > \frac{c}{d}$, es decir, que $a, b, d > 0$ y $c < 0$. Pero este caso es imposible porque $ad - cb \geq 1 + 1 = 2$ pero también $ad - cb = 1$ por formar un par de Farey. □

Proposición 4.10 *Dadas dos teselas distintas, su intersección es o bien un lado o bien vacía (observemos que los vértices no se encuentran en \mathbb{H}^2).*

Demostración: Hemos visto que si dos geodésicas de la teselación se cortan, éstas son iguales, es decir, que dadas dos teselas cabe la posibilidad de que se corten en un lado.

Ya hemos visto que dos geodésicas distintas no se cortan en ningún punto, veamos ahora que el interior de las teselas tampoco. Sean t_1 y t_2 dos teselas distintas. Por el lema anterior, $\overset{\circ}{t}_1$ no puede intersectar los lados de t_2 , porque se produciría intersección de las geodésicas que forman los bordes de t_1 con las de t_2 . Esto quiere decir, que como $\overset{\circ}{t}_1$ es conexo, solo se pueden dar los casos $\overset{\circ}{t}_1 \subset \mathbb{H}^2 \setminus \overset{\circ}{t}_2$ ó $\overset{\circ}{t}_1 \subset \overset{\circ}{t}_2$. Por otra parte, si seguimos el mismo razonamiento para estudiar t_2 , llegamos a la conclusión de que $\overset{\circ}{t}_2 \subset \mathbb{H}^2 \setminus \overset{\circ}{t}_1$ ó $\overset{\circ}{t}_2 \subset \overset{\circ}{t}_1$. Es decir $\overset{\circ}{t}_1 = \overset{\circ}{t}_2$, con lo que $t_1 = t_2$, pero habíamos tomado $t_1 \neq t_2$, luego $\overset{\circ}{t}_1 \cap \overset{\circ}{t}_2 = \emptyset$ y si se produce intersección entre dos teselas será en una única geodésica. Si fuera en dos geodésicas distintas, tendríamos determinados para ambas teselas los tres vértices de cada triángulo con lo que una vez más, las dos teselas serían iguales. \square

Proposición 4.11 *Dado un punto $p \in \mathbb{H}^2$ existe $\epsilon > 0$ de modo que $B(p, \epsilon)$ interseca a un número finito de teselas.*

Demostración: Sea $p \in \mathbb{H}^2$ tal que p no pertenece a una geodésica de la teselación y que p pertenece a una tesela t . Hemos visto en el corolario 1.29 que la topología inducida por la distancia es la misma que la topología inicial de la superficie. La topología inicial de la superficie es la topología usual restringida a $\{(x, y) : y > 0\}$, con lo que quitando a \mathbb{H}^2 las tres geodésicas de la tesela (que es un cerrado porque las geodésicas son curvas y son cerradas en la topología usual) obtenemos un abierto no conexo con cuatro componentes conexas, y con ello tenemos que el interior de la tesela es un abierto conexo. Como es un abierto existen abiertos contenidos en $\overset{\circ}{t}$ para la topología usual y por tanto como el conjunto de bolas forma una base de la topología existirá ϵ con $B(p, \epsilon) \subset \overset{\circ}{t}$.

Por otro lado, supongamos que $p \in t_1 \cap t_2 \neq \emptyset$, es decir, por la proposición 4.10, p pertenece a una geodésica γ de la teselación. En ese caso podemos proceder de la misma forma que antes, pero esta vez trabajamos con el interior cuadrilátero delimitado por las otras dos geodésicas de t_1 y las dos de t_2 . Se encuentra ϵ de modo que la bola abierta de radio ϵ centrada en p esté totalmente contenida el cuadrilátero e interseque únicamente a dos teselas, t_1 y t_2 . \square

Con esta última proposición y las precedentes, aseguramos que la teselación de Farey es en efecto una teselación del plano hiperbólico porque cumple las propiedades dadas en la definición 4.1.

Corolario 4.12 *Se tiene que:*

- I- Todo número racional es un vértice de la teselación de Farey.

II- La teselación de Farey es invariante por la acción de $PSL(2, \mathbb{Z})$

Demostración: Estudiamos el caso $\frac{p}{q} > 0$. Por la proposición 2.7, se tiene que todo número racional $\frac{p}{q}$ se puede expresar de manera única como la suma de Farey de otros dos números racionales que formen un par de Farey y de hecho, forma un par de Farey con cada uno de ellos, $\frac{p}{q} = \frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d}$. De esta forma, el triángulo formado por $\frac{p}{q}$ y sus dos padres de Farey forman un triángulo que pertenece a la teselación. Para el caso de que $\frac{p}{q} < 0$, tenemos que $-\frac{p}{q} = -(\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d})$, luego podemos tomar $-\frac{a}{b}$ y $-\frac{c}{d}$.

Para la segunda afirmación, sea $T \in PSL(2, \mathbb{Z})$ tenemos directamente de la proposición 4.5 que la imagen por T de un triángulo de la teselación de Farey es otro triángulo de la misma y por otro lado, dado un triángulo su imagen por T^{-1} también es un triángulo. \square

4.3. Relación de la teselación de Farey con las fracciones continuas

Se va a presentar la relación de la teselación de Farey con las fracciones continuas. En esta sección se va a poner en manifiesto la relación de dos campos de estudio de las matemáticas. Las fracciones continuas que aparentemente no tienen ningún tipo de relación con la geometría, se pueden interpretar desde un punto de vista geométrico utilizando la teselación de Farey. Se van a seguir [14, 23].

Proposición 4.13 *Dado un triángulo cualesquiera de la teselación de Farey, cuyos vértices sean $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$, se pueden escribir*

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= [a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] \\ \frac{r}{s} &= [a_0, a_1, \dots, a_n] \\ \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} &= [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, 1]\end{aligned}$$

si n es par, y

$$\begin{aligned}\frac{p}{q} &= [a_0; a_1, \dots, a_n] \\ \frac{r}{s} &= [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}] \\ \frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} &= [a_0, a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, 1]\end{aligned}$$

si n es impar.

Demostración: Escribimos la expresión en fracciones continuas de $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s}$ de modo que el último entero sea uno, $[a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, 1]$. Por un lado, tenemos $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s}$ y por otro

lado $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, \dots, a_k]$ con $a_{n+2} = 1$, para $k = 1, \dots, k+2$. Entonces, usando la relación (2.1), tenemos que $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{a_{n+2}p_{n+1} + p_n}{a_{n+2}p_{n+1} + p_n} = \frac{p_{n+1} + p_n}{q_{n+1} + q_n}$. Por la proposición 2.12, se tiene que los convergentes $\frac{p_n}{q_n}$ y $\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$ forman un par de Farey y por la proposición 2.7 todo número racional se puede expresar de forma única como suma de dos números racionales que formen un par de Farey. Concluimos que como $\frac{p}{q} > \frac{r}{s}$, si n es impar $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ y $\frac{r}{s} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = [a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]$. Si n es par, tenemos que $\frac{p}{q} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = [a_0; a_1, \dots, a_n, a_{n+1}]$ y $\frac{r}{s} = \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$. \square

Vamos a intentar relacionar la expresión de un número en fracciones continuas con la teselación de Farey. En primer lugar, daremos algunas nociones.

Definimos la orientación de una geodésica seleccionando un principio y un fin de la misma. Sea una tesela t de la teselación de Farey y una geodésica orientada γ de modo que $t \cap \gamma \neq \emptyset$ y $t \cap \gamma$ no es uno de los lados de la tesela. Decimos que se produce un corte a derecha si el vértice donde confluyen los dos lados a los que corta la geodésica se encuentra a la derecha de la geodésica para una orientación fijada. En el caso contrario diremos que se cortan a izquierda. Si el corte se produce exactamente en uno de los vértices, diremos que este corte está indeterminado. En la teselación de Farey solo se puede producir un corte indeterminado si el vértice en cuestión es uno de los racionales en la recta del infinito, en cuyo caso no se puede prolongar más la geodésica, es decir, no se encontrarán más cortes a partir de este punto. Ilustramos los distintos tipos de corte que hemos definido en la figura 4.4 pero notemos que también es aplicable a triángulos cuyo vértice sea ∞ .

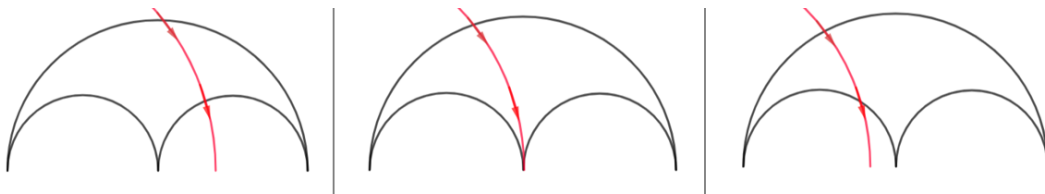


Figura 4.4: De izquierda a derecha tenemos una geodésica cortando a una tesela por la izquierda, de forma indeterminada y por la derecha.

Definición 4.14 Sea γ una geodésica en el plano hiperbólico que corta al eje imaginario y $P \in \gamma \cap \mathbb{I}$, decimos que una **sucesión de corte** desde P con la geodésica orientada desde P hasta $x > 0$ es $L^{a_0} R^{a_1} L^{a_2} R^{a_3} \dots$ si la geodésica desde el punto P corta en primer lugar a izquierda a_0 veces, después a derecha a_1 y de éste modo hasta llegar donde acaba γ . Notemos que no tiene porque empezar por L luego, se considerará $a_i > 0$ para todo $i \geq 1$ mientras que $a_0 \geq 0$. En el caso de que el último corte sea indeterminado, se podrá tomar en la sucesión de corte uno más a la izquierda o a la derecha, pero elegiremos añadir una unidad al anterior tipo de corte que aparece en la sucesión.

Esta definición es válida en toda geodésica de \mathbb{H}^2 que corte al eje imaginario, exceptuando a las que conforman la teselación de Farey, que si cortan a esta recta lo hacen únicamente en uno de los puntos del infinito y donde carece sentido definir la sucesión de corte ya que no se cortan con ninguna otra tesela.

Para la relación de las fracciones continuas con la teselación de Farey que vamos a introducir

a continuación, tomaremos únicamente geodésicas cuyos extremos sean $x > 0$ y $w < 0$ y las sucesiones de corte que se van a estudiar se toman desde el punto de intersección de la geodésica con el eje imaginario \mathbb{I} .

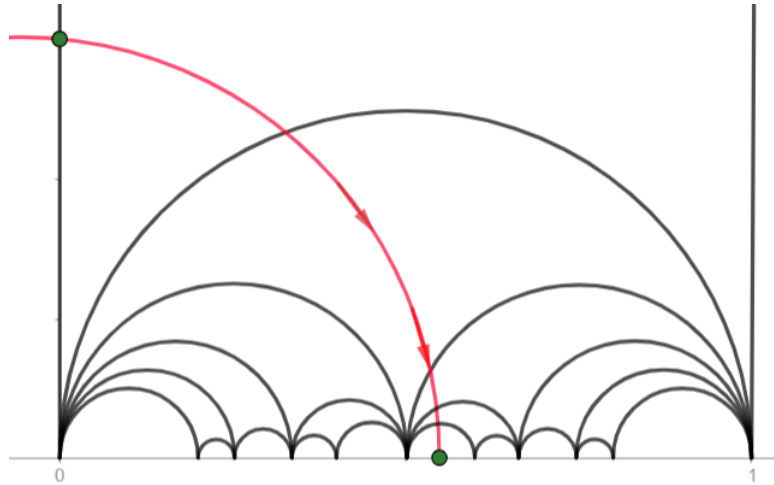


Figura 4.5: Ejemplo de una geodésica que se puede utilizar para conocer geoméricamente la descomposición en fracciones continuas de un número.

Proposición 4.15 Sean $x > 0$ un número real, $z \in \mathbb{I}$ y γ la geodésica orientada de z a x . Si la sucesión de corte con la teselación de Farey es $L^{a_0}R^{a_1}L^{a_2}R^{a_3}\dots$, entonces se tiene que la sucesión de convergentes $\left\{\frac{p_k}{q_k}\right\}_k$ de la expresión en fracciones continuas de x está dada por $\frac{p_k}{q_k} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$ para $k = 0, 1, \dots$

Demostración: Vamos a probar por inducción que para un cierto n , se tiene que $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$ donde los a_i son los índices de la sucesión de corte. Para el desarrollo de este demostración introduciremos dos transformaciones de $PSL(2, \mathbb{Z})$, la traslación una unidad hacia la derecha $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la inversión (de signo opuesto) $H = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Estas dos transformaciones preservan sucesiones de corte ya que son elementos de $PSL(2, \mathbb{Z})$ y $\det(H) = \det(T) = 1$. Definimos los puntos z_i como los puntos de corte de la geodésica con las teselas en las que se produce un cambio de la sucesión de corte de L a R si i es par y de R a L si es impar. Vamos a utilizar también el algoritmo de fracciones continuas, siendo $x_0 = x$, $a_0 = \lfloor x_0 \rfloor$, $x_k = \frac{1}{x_{k-1} - a_{k-1}}$ y $a_k = \lfloor x_k \rfloor$ si $x_{k-1} \neq a_{k-1}$. Vamos a probar por inducción que para cada $n \geq 1$ se tiene que, si n es par

- (i) $HT^{a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(x) = (-1)^n x_n$
- (ii) $HT^{a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_{n-1}) \in \mathbb{I}$
- (iii) $HT^{a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_n)$ está en la recta vertical $\{x = (-1)^n a_n\}$
- (iv) los cortes de $HT^{a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_{n-1})$ a $HT^{a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(x)$ se producen por la izquierda.

mientras que si n es impar tenemos que

- (i) $HT^{-a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(x) = (-1)^n x_n$
- (ii) $HT^{-a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_{n-1}) \in \mathbb{I}$
- (iii) $HT^{-a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_n)$ está en la recta vertical $\{x = (-1)^n a_n\}$
- (iv) los cortes de $HT^{-a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_{n-1})$ a $HT^{-a_{n-1}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(x)$ se producen por la derecha.

Comenzamos probando los primeros pasos $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$, y después utilizamos la hipótesis de inducción.

- **n=0.** Veamos que $\frac{p_0}{q_0} = a_0$. En caso de que $x < 1$, el primer corte con el triángulo básico se produce por la derecha y $a_0 = 0$. En caso de que $x \geq 1$ tenemos dos casos. Si $x \in \mathbb{Z}$, se tiene que los primeros cortes se producen por la izquierda y el último indeterminado, con lo que por lo que se vio en la definición de sucesión de corte se añadiría un corte más por la izquierda y $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Si $x \notin \mathbb{Z}$, se tiene producen $\lfloor x \rfloor$ cortes por la izquierda antes de que comiencen a producirse cortes por la derecha. Obtenemos $a_0 = \lfloor x \rfloor$ y $\frac{p_0}{q_0} = a_0$.
- **n=1.** Veamos ahora cuántos cortes se producen por la derecha. Sea z_0 el punto donde se produce el cambio de tipo de corte L a R , situado en la recta $\{x = a_0\}$, trasladamos z_0 al eje \mathbb{I} utilizando la transformación T^{-a_0} . Aplicando H , ahora $HT^{-a_0}(z_0)$ está en el eje \mathbb{I} . Por otra parte $HT^{-a_0}(x) < 0$, de hecho, $HT^{-a_0}(x) = \frac{-1}{x-a_0} < -1$ porque $x - a_0 < 1$ y tenemos que $HT^{-a_0}(x) = -x_1$. Por tanto, los siguientes cortes de $HT^{-a_0}(z_0)$ a $HT^{-a_0}(x)$ se producen por la derecha y este número de cortes a la derecha que se producen es $\lfloor -x_1 \rfloor = a_1$. Se tiene que $\frac{p_1}{q_1} = [a_0; a_1]$ y que $HT^{-a_0}(z_1)$ está en la recta $\{x = a_1\}$.
- **n=2.** Como $x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1}$, entonces $T^{a_1} HT^{-a_0}(x) = -\frac{1}{x_2}$ y por lo tanto, $HT^{a_1} HT^{-a_0}(x) = x_2$. Luego, la sucesión de corte de la geodésica $HT^{a_1} HT^{-a_0}(\gamma)$, desde $HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_1) \in \mathbb{I}$ a $HT^{a_1} HT^{-a_0}(x)$, empieza con $L^{a_2} R$ donde $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$, que coincide con la sucesión de corte de γ a partir de z_2 . Además, es claro que $HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_2)$ está en la recta $\{x = a_2\}$. Por el Teorema 2.15, se tiene que $\frac{p_2}{q_2} = [a_0; a_1, a_2]$.
- Suponemos cierto el caso **n-1** par, es decir, si la sucesión de corte hasta z_{n-1} es $L^{a_0} R^{a_1} \dots L^{a_{n-1}}$ se tiene que $HT^{a_{n-2}} \dots HT^{-a_0}(x) = (-1)^{n-1} x_{n-1} = x_{n-1}$, que $HT^{a_{n-2}} \dots HT^{-a_0}(z_{n-1})$ está en la recta $\{x = (-1)^{n-1} a_{n-1}\}$ y que $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}]$. Entonces, como $n-1$ es par, se tiene que los cortes a partir de $HT^{a_{n-2}} \dots HT^{-a_0}(z_{n-1})$ vuelven a ser por la derecha. Para trasladar este punto al eje \mathbb{I} aplicamos la transformación $T^{-a_{n-1}}$ y tenemos $T^{-a_{n-1}} HT^{a_{n-2}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(x) = x_{n-1} - a_{n-1}$. Aplicando después la transformación H , seguimos teniendo $HT^{-a_{n-1}} HT^{a_{n-2}} \dots HT^{-a_0}(z_{n-1})$ en el eje \mathbb{I} y $HT^{-a_{n-1}} HT^{a_{n-2}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(x) = -\frac{1}{x_{n-1} - a_{n-1}} = -x_n = (-1)^n x_n$. Entonces, ahora tenemos que analizar el número de cortes a la derecha desde este punto a $HT^{-a_{n-1}} HT^{a_{n-2}} \dots HT^{-a_0}(x)$. El número de cortes a la derecha que se produce $HT^{-a_{n-1}} HT^{a_{n-2}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(\gamma)$, desde $HT^{-a_{n-1}} HT^{a_{n-2}} \dots HT^{a_1} HT^{-a_0}(z_{n-1})$

hasta $HT^{-a_{n-1}}HT^{a_{n-2}}\dots HT^{a_1}HT^{-a_0}(x)$ es $a_n = \lfloor x_n \rfloor$. Además, $HT^{-a_{n-1}}HT^{a_{n-2}}\dots HT^{a_1}HT^{-a_0}(z_n)$ está en la recta $\{x = -a_n\}$ y usando de nuevo el Teorema 2.15, $\frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, \dots, a_n]$, como queríamos.

La demostración por inducción para el caso en el que $n-1$ es impar, se obtiene de la misma forma que ésta. \square

En el apéndice B se muestran gráficamente los primeros pasos de la demostración anterior para $\frac{p}{q} = \frac{4}{7}$.

Proposición 4.16 *Dados dos racionales $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ que forman un par de Farey, se cumple que o bien $L(\frac{p}{q}) = \frac{r}{s}$ o bien $R(\frac{r}{s}) = \frac{p}{q}$.*

Demostración: Como $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ forman un par de Farey, $\frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q}$ son los dos extremos de una geodésica de la teselación de Farey. Una geodésica de la teselación de Farey pertenece a dos teselas. Por un lado, una tesela será la que tiene por vértices $\frac{r}{s}$, $\frac{p}{q}$ y $\frac{r}{s} \oplus \frac{p}{q}$. Por otro lado, por la proposición 4.14, tenemos dos posibilidades. Que el otro vértice de la tesela sea $\frac{u}{w}$ con $\frac{u}{w} < \frac{r}{s}$ o que $\frac{u}{w} > \frac{p}{q}$. En el primer caso, $\frac{r}{s} = \frac{p}{q} \oplus \frac{u}{w}$ y en el segundo $\frac{p}{q} = \frac{u}{w} \oplus \frac{r}{s}$. \square

Teorema 4.17 *Siguiendo el desarrollo anterior, sean $x \in \mathbb{R}$ y $L^{a_0}R^{a_1}L^{a_2}\dots$ la sucesión de corte que sigue una geodésica que parte de un punto del eje imaginario a x . Entonces las geodésicas de la teselación $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots$ en las cuales encontramos a los puntos z_0, z_1, z_2, \dots que marcan los cambios en las sucesiones de corte de L a R o de R a L , tienen como extremos*

- $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$ y $\frac{p_{2k-1}}{q_{2k-1}}$ para γ_n con $n = 2k$.
- $\frac{p_{2k}}{q_{2k}}$ y $\frac{p_{2k+1}}{q_{2k+1}}$ para γ_n con $n = 2k + 1$.

donde $\frac{p_k}{q_k}$ son las sucesión de convergentes de la fracción continua $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ y $\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0}$.

Demostración: Para el desarrollo de esta demostración recordemos que dada una geodésica de la teselación que corte con la geodésica γ orientada de $z \in \mathbb{I}$ a $x > 0$, ésta sólo puede formar parte de dos teselas. Notemos que ésta tendrá dos extremos $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ en la recta real que por ser vértices en la teselación de Farey, $\frac{r}{s}$ y $\frac{p}{q}$ son racionales y aparecen en el árbol de Farey. En el árbol de Farey, diremos que $\frac{r}{s}$ está a la izquierda de $\frac{p}{q}$ porque $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ y se cumple que $L(\frac{p}{q}) = \frac{r}{s}$ o $R(\frac{r}{s}) = \frac{p}{q}$. Sin embargo, respecto a la geodésica orientada $\frac{r}{s}$ se encuentra a la derecha y $\frac{p}{q}$ a la izquierda. Hacemos esta observación porque puede parecer que se contradicen las nociones de izquierda y derecha.

Comenzamos analizando z_0 , sabiendo que hasta z_0 el vértice a la izquierda es el punto del infinito $\frac{1}{0}$ y que z_0 está en la recta $\{x = a_0\}$, es decir la geodésica con extremos $\frac{p_0}{q_0} = a_0$ e ∞ ó $\frac{1}{0}$.

Después de z_0 , encontramos a_1 cortes a la derecha hasta z_1 , de modo que, como no se produce en estas a_1 teselas ningún cambio en el tipo de corte por la derecha o por la izquierda, se mantendrá $\frac{p_0}{q_0}$ como extremo a la derecha de las geodésicas respecto de γ ,

mientras que irá variando en cada geodésica el extremo de la izquierda. De este modo, por construcción de la teselación tenemos

$$\left(\frac{1}{0} \oplus \frac{p_0}{q_0}\right) \oplus \dots \oplus \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_1 p_0 + 1}{a_1 q_0}$$

Esta expresión se puede comparar con la presentada para los convergentes en (2.1) y es $\frac{p_1}{q_1}$. Además, encontramos cierta relación con la proposición 2.19, ya que mantener un vértice a la derecha durante a_1 cortes es análogo a decir que se están tomando hijos de Farey de modo que se mantenga $\frac{p_0}{q_0}$ por la izquierda en el árbol de Farey, es decir, tomar el primer hijo por la derecha, ya que $r(\frac{p_0}{q_0}) > \frac{p_0}{q_0}$ y los sucesivos hijos de éste por la izquierda (de modo que en todo momento se utilice $\frac{p_0}{q_0}$ y éste racional sea el menor de los implicados $\frac{p_0}{q_0} < l^{a_1-1} r(\frac{p_0}{q_0})$).

Del mismo modo, el siguiente punto donde se produce un cambio es el z_1 en la geodésica γ_1 , de forma que el tipo de cortes pasan de ser derecha a izquierda, y esto sucede hasta z_2 , en la geodésica γ_2 . Como ha habido a_2 cortes por la izquierda de z_1 a z_2 , el vértice que se encontraba a la izquierda de éstos no cambia y es $\frac{p_1}{q_1}$. Procediendo como antes y sabiendo que el vértice a la derecha de γ_1 era $\frac{p_0}{q_0}$, llegamos a que el otro extremo de γ_2 es $\frac{p_2}{q_2} = \frac{p_0 + a_2 p_1}{q_0 + a_2 q_1}$. De nuevo, podemos comparar con el resultado de la proposición 2.19, ya que se ha mantenido el vértice $\frac{p_1}{q_1}$ por a la izquierda de la geodésica, lo que implica que se ha mantenido a la derecha en el árbol de Farey, luego se ha tomado el primer hijo de $\frac{p_1}{q_1}$ por la izquierda, de modo que $l(\frac{p_1}{q_1}) < \frac{p_1}{q_1}$ y para mantener este vértice se han ido tomando sucesivamente $a_2 - 1$ hijos por la izquierda porque $r^{a_2-1} l(\frac{p_1}{q_1}) < \frac{p_1}{q_1}$, con lo que finalmente se obtiene $\frac{p_2}{q_2}$.

Ahora, supongamos que para un cierto $n - 1$ impar tenemos que la geodésica γ_{n-1} tiene como extremos $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ y $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. Como $n - 1$ es impar, el corte de γ con γ_{n-1} se produce en z_{n-1} y dicho punto marca en la sucesión de corte un cambio de R a L , con lo que tenemos que el vértice que antes quedaba a la derecha era en el fragmento de la sucesión $R^{a_{n-1}}$ era el menor (por encontrarse a la derecha de la geodésica orientada de $z \in \mathbb{I}$ a $0 < x \in \mathbb{R}$), $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$. En el punto z_n en γ_n se produce un cambio en la secuencia de L a R , con lo que ahora el vértice $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ se encuentra en los a_n cortes a la izquierda hasta que se produce el siguiente cambio. Partimos de los extremos de la geodésica γ_{n-1} , y cruzamos a_n teselas dejando $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ por la izquierda, con lo que la última geodésica que cruzamos también tendrá este extremo por la izquierda y su extremo por la derecha es

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}} \oplus \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \oplus \dots \oplus \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = \frac{a_n p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + q_{n-2}} = \frac{p_n}{q_n}$$

Podemos comparar este resultado de nuevo con la proposición 2.19 ya que estamos manteniendo a_n veces por la izquierda el vértice $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, con lo que en el árbol de Farey se utilizará a_n veces y para ello será necesario tomar en primer lugar un hijo por la izquierda ya que $l(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}) < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, y después sucesivos hijos por la derecha de éste ya que $r^{a_n-1} l(\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}) < \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$. En el caso de que $n - 1$ fuera par, se procede de modo similar. Se ilustran las cuatro primeras geodésicas γ_n y sus extremos en la figura 4.6. \square

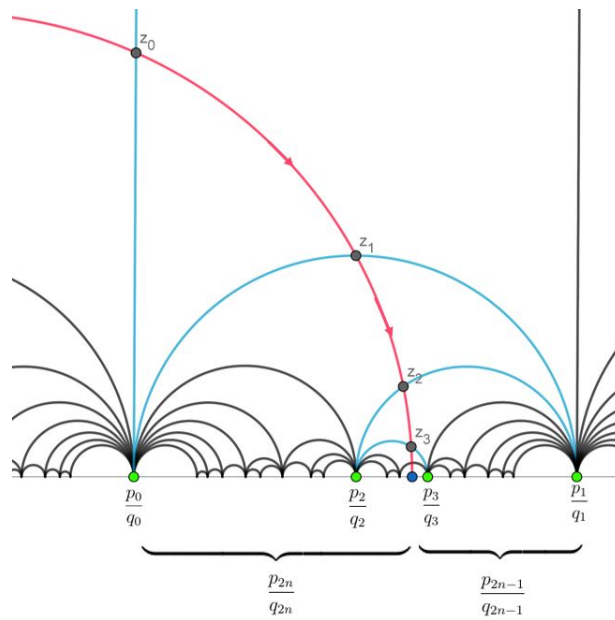


Figura 4.6: Se representan las primeras γ_n (en azul), los puntos z_n y los convergentes. Notemos que los convergentes pares quedan por la derecha de la geodésica γ y los impares por la izquierda.

Proposición 4.18 *Dado un número real $x < 0$ podemos calcular la expresión en fracciones continuas aplicando la proposición 4.15 a $x - \lfloor x \rfloor$, de modo que $a_0 = \lfloor x \rfloor$, y a_i para $i \geq 1$ los enteros de la expresión en fracciones continuas de $x - \lfloor x \rfloor = [0; a_1, a_2, \dots]$*

Demostración: Utilizando el algoritmo de cálculo de fracciones continuas nos dice que $a_0 = \lfloor x \rfloor$. Si aplicamos la traslación T^{-a_0} nos trasladamos a_0 unidades hacia la derecha, con lo que $0 \leq x_1 < 1$, porque $x_1 = 0$ ó

$$x_1 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

Si $x_1 \neq 0$, x_1 es un número real positivo, con lo que podemos aplicar la proposición para el cálculo en fracciones continuas visto en la proposición 4.15 obteniendo $[a'_0; a'_1, a'_2, \dots]$. Como $0 < x_1 < 1$, $a'_0 = 0$ y por construcción, se obtendrá $a'_i = a_i$ para $i \geq 1$. \square

Ejemplo 4.19 *Veamos cómo se procede en el cálculo de la expresión en fracciones continuas de un número. Tomamos un número real cualesquiera, por simplicidad hemos elegido $\frac{4}{7}$. Trazamos la geodésica que une un punto del eje imaginario con $\frac{4}{7}$. Anotamos la sucesión de corte (ver figura 4.7). Observamos que la sucesión de corte se corresponde con*

$$RLR^2I$$

donde I denota un corte indeterminado. Otra forma de calcular la sucesión de corte sería utilizando la técnica de la demostración de la proposición 4.15, como presentamos en el apéndice B. Como la sucesión empieza en R , $a_0 = 0$, y como el último corte es indeterminado, observamos que la expresión en fracciones continuas puede ser

$$[0; 1, 1, 2, 1] \quad \text{ó} \quad [0; 1, 1, 3]$$

Podemos elegir la representación $[0; 1, 1, 3]$ por ser la que implica un menor número de enteros y porque por la definición 4.14 elegimos la sucesión de corte en la que se añade una unidad al anterior tipo de corte RLR^3 . Además, en la figura se han marcado los vértices en los que confluyen las geodésicas de las teselas que cortan a izquierda o a derecha. Podemos comprobar que estos vértices coinciden con los convergentes de $[0; 1, 1, 3]$. En primer lugar, el 0 es el primer convergente porque $a_0 = 0$, el 1 será el segundo porque $1 = [0; 1]$, después $\frac{1}{2} = [0; 1, 1]$ y por último $\frac{4}{7} = [0; 1, 1, 3]$.

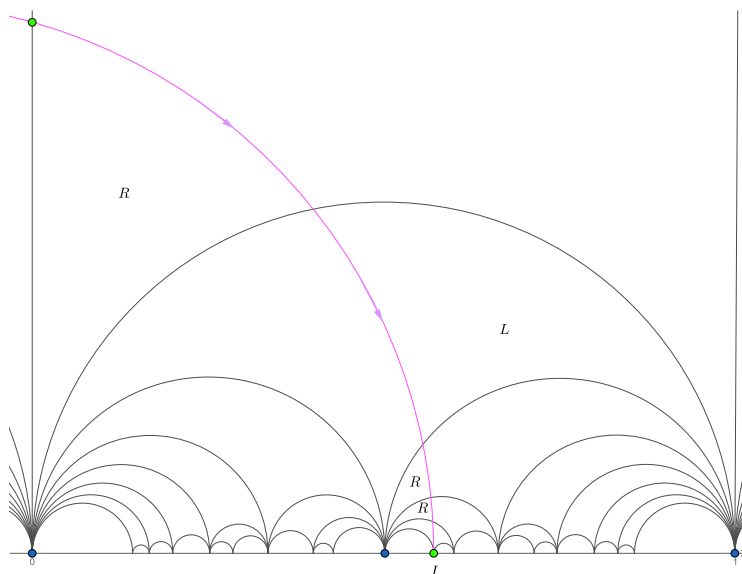


Figura 4.7: Se representa una geodésica cualesquiera que une un punto del eje imaginario \mathbb{I} con $\frac{4}{7}$. Se marcan los cortes con las teselas L y R , en función de si cortan por la derecha o por la izquierda, o I si se produce un corte indeterminado con una tesela. En azul se han marcado aquellos vértices que nos han servido de referencia para saber si el corte se producía por la izquierda o por la derecha.

Bibliografía

- [1] Fracciones continuas. <https://www.sacred-geometry.es/?q=es/content/fracciones-continuas>, 2014.
- [2] BONAHOE, F. *Low-Dimensional Geometry. From Euclidean Surfaces to Hyperbolic Knots*. Student mathematical library, vol 49. American Mathematical Society, 2009.
- [3] BOSMA, W. Y KRAAIKAMP, C. Continued fractions. Disponible en <https://www.math.ru.nl/~bosma/Students/CF.pdf>, 2012-2013.
- [4] BRANNAN D. A. , ESPLEN M. F. Y GRAY J. J. *Geometry*. 2º edición, Cambridge University Press, 2012.
- [5] BRUCKS, K. M. Y BRUIN H. *Topics from One-Dimensional Dynamics*. Cambridge University Press, 2004.
- [6] CANNON, J. W. , FLOYD, W. J., KENYON, R. Y PARRY, W. R. . *Hyperbolic geometry. Flavors of geometry*.
- [7] DE CARIA, P. Y SCHAPOSNIK, L. Grupos matriciales. Disponible en <http://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/EA/13.%20Grupos%20Matriciales%20-%20P.%20De%20Caria%20&%20L.%20Schaposnik%20-%202007.pdf>, 2007.
- [8] DO CARMO, M. *Riemannian Geometry*. Birkhäuser, 1992.
- [9] ETAYO GORDEJUELA, F. *Teoría Global de Superficies. Guión de la asignatura*. Curso 2017-2018.
- [10] ETAYO GORDEJUELA, F. *Variedades Diferenciables*. Notas del curso 2018-2019.
- [11] FORD, L. R. *Fractions. The American Mathematical Monthly, Vol. 45, No. 9* (Noviembre 1938).
- [12] HARDY, G. H. Y WRIGHT E. M. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Ely House, London, 1975.
- [13] HATCHER, A. *Topology of Numbers*. Disponible en <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/TN/TNbook.pdf> 2014.

- [14] KARPENKOV, O. *Geometry of Continued Fractions*. Algorithms and Computation in Mathematics 26, Springer, 2013.
- [15] KHINCHIN, A. *Continued fractions*. The University of Chicago Press, 1964.
- [16] LEE, J. M. *Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature*. Springer. Graduate Text in Mathematics 176, 1991.
- [17] MILLMAN, R. S. Y PARKER G. D. *Elements of Differential Geometry*. Prentice-Hall, Inc. 1977.
- [18] MORENO MUÑOZ, E. Transformaciones de Möbius en el plano complejo extendido. Disponible en http://esfm.egormaximenko.com/students/Moreno_Munoz_2017_Mobius_transforms_in_the_extended_complex_plane_es.pdf, Instituto Politécnico Nacional. Escuela Superior de Física y Matemáticas, 2017.
- [19] MÁRQUEZ, J. *El plano hiperbólico: Historia y Fundamentos*. Disponible en <https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/43806>, Sevilla, 2016.
- [20] MUNKRES, J. R. *Topología*. Massachusetts Institute of Technology. Prentice Hall, 2002.
- [21] NAJERA, A. *Dinámica de coeficientes de un álgebra de conglomerado tubular*, Universidad Nacional Autónoma de México, 2009.
- [22] RAMÍREZ GALARZA, A.I Y SEADE, J. *Introducción a la geometría avanzada*. Facultad de Ciencias, UNAM, 2016.
- [23] SERIES, C. Continued fractions and hyperbolic geometry. Disponible en <http://homepages.warwick.ac.uk/~masbb/HypGeomandCntdFractions-2.pdf>, Loughborough LMS Summer School, 2015.
- [24] WALKDEN, C. Hyperbolic geometry. Disponible en https://personalpages.manchester.ac.uk/staff/charles.walkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic_geometry.pdf, The university of Manchester, 2019.

Apéndice A

Grupos proyectivos

En primer lugar vamos a introducir a los grupos lineales generales y especiales, así como los grupos proyectivos de los mismos, en el caso de dimensión dos. Gran parte del contenido de esta sección está basado en [7].

Definición A.1 Sea K un cuerpo y $\mathcal{M}_2(K)$ las matrices de dimensión dos y coeficientes en K . El **grupo lineal general** de dimensión dos se define como el conjunto de elementos inversibles de $\mathcal{M}_2(K)$, y se denota como $GL(2, K)$.

Proposición A.2 $GL(2, K)$ forman un grupo respecto de la operación producto de matrices.

Demostración: En primer lugar $GL(2, K) \subseteq \mathcal{M}_2(K)$, luego la operación producto de matrices es la operación heredada de este anillo y sabemos que la identidad es el elemento neutro y que la operación es asociativa. Como se están tomando las matrices inversibles, dada $A \in GL(2, K)$, existe A^{-1} . Además se tiene que $A^{-1} \in GL(2, K)$ porque $(A^{-1})^{-1} = A$. \square

Proposición A.3 Toda transformación de Möbius se puede escribir como un elemento del grupo lineal general.

Demostración: Dada una transformación de Möbius, ésta será de la forma: $\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ con $ad - bc \neq 0$. Se puede representar como $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. La composición de transformaciones de Möbius se expresa como el producto de matrices, de modo que si $\phi(z) = \frac{ez+f}{gz+h}$

$$\phi \circ \varphi(z) = \frac{e\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + f}{g\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) + h} = \frac{(ea + fc)z + eb + fd}{(ga + hc)z + gb + hd}$$

Queremos ver que coincide con el producto de ambas matrices en $GL(2, \mathbb{C})$.

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ea + fc & eb + fd \\ ga + hc & gb + hd \end{pmatrix}$$

\square

Observación A.4 Dada una transformación de Möbius, existe más de una representación matricial de la misma, ya que una transformación de Möbius no cambia respecto al producto de todos sus coeficientes por escalares. Es decir, $\phi(z) = \frac{ez+f}{gz+h} = \frac{Cez+Cf}{Cgz+Ch}$, con $C \neq 0$. Por tanto se tiene que existe un epimorfismo $\varphi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}$ entre los elementos de ambos grupos.

Definición A.5 El **grupo lineal especial** de dimensión dos sobre el cuerpo K , se define como subgrupo de $GL(2, K)$ en el cual todos sus elementos tienen determinante igual a 1. Se denota como **$SL(2, K)$** .

Proposición A.6 **$SL(2, K)$** forman un grupo respecto de la operación producto de matrices.

Demostración: $I \in SL(2, K)$ porque $\det(I) = 1$, luego tiene elemento neutro. La operación es asociativa porque es subgrupo de $GL(2, K)$. Sea $A \in SL(2, K)$, $A^{-1} \in SL(2, K)$, porque $\det(AA^{-1}) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = 1$. \square

Definición A.7 El **grupo proyectivo lineal general** **$PGL(2, K)$** se define como el grupo cociente de las matrices de $GL(2, K)$ por el grupo de matrices escalares $\{kI : k \in K\}$. El **grupo proyectivo lineal especial** **$PSL(2, K)$** se define como el grupo cociente de las matrices de $SL(2, K)$ por el grupo de matrices escalares $\{kI : k \in K, kI \in SL(2, k)\} = \{\pm I\}$.

Proposición A.8 El grupo de transformaciones de Möbius está en biyección con $PGL(2, \mathbb{C})$.

Demostración: Ya hemos visto que todo elemento de $GL(2, \mathbb{C})$ define una transformación de Möbius, de hecho existe un epimorfismo $\varphi : GL(2, \mathbb{C}) \rightarrow \text{Möb}$. Calculamos el núcleo de este epimorfismo, es decir, aquellas matrices de $GL(2, \mathbb{C})$ que nos dan la identidad. Éstas son las matrices escalares $\text{Ker } \varphi = \{kI : k \in K\}$. Por definición de $PGL(2, \mathbb{C})$ se tiene que $PGL(2, \mathbb{C}) = GL(2, \mathbb{C}) / \text{Ker } \varphi$, y por el primer teorema de isomorfía: $\text{Möb} \cong PGL(2, \mathbb{C})$ \square

Proposición A.9 $PGL(2, \mathbb{C})$ y $PSL(2, \mathbb{C})$ son isomorfos.

Demostración: Definimos un isomorfismo entre ambos conjuntos $\varphi : PGL(2, \mathbb{C}) \rightarrow PSL(2, \mathbb{C})$. Sea $A \in PGL(2, \mathbb{C})$, el elemento $\det(A)^{-1/2}A \in PSL(2, \mathbb{C})$ (A es cualquier representante de la clase). El morfismo es sobreyectivo porque dada cualquier $A \in PSL(2, \mathbb{C})$, existe $A \in PGL(2, \mathbb{C})$, ya que por construcción $PSL(2, \mathbb{C}) \subseteq PGL(2, \mathbb{C})$, podemos tomar A directamente. También es inyectiva, porque dados dos elementos $A, B \in PGL(2, \mathbb{C})$, suponemos que tienen la misma imagen, $\det(A)^{-1/2}A = \det(B)^{-1/2}B$ lo que es equivalente a que $A = \frac{\det(B)^{-1/2}}{\det(A)^{-1/2}}B$ que implica que $A \equiv B \in PGL(2, \mathbb{C})$ \square

A lo largo de este trabajo se ha utilizado el grupo proyectivo lineal especial con coeficientes en \mathbb{C} o algún subgrupo de este.

Apéndice B

Visión geométrica de las sucesiones de corte

En este apéndice se van a mostrar los primeros pasos de la demostración de la proposición 4.15. Se ha tomado $\frac{p}{q} = \frac{4}{7}$ como en el ejemplo. En primer lugar se traza una geodésica que vaya de un punto del eje imaginario a $\frac{4}{7}$. Mostramos este paso en la figura B.1.

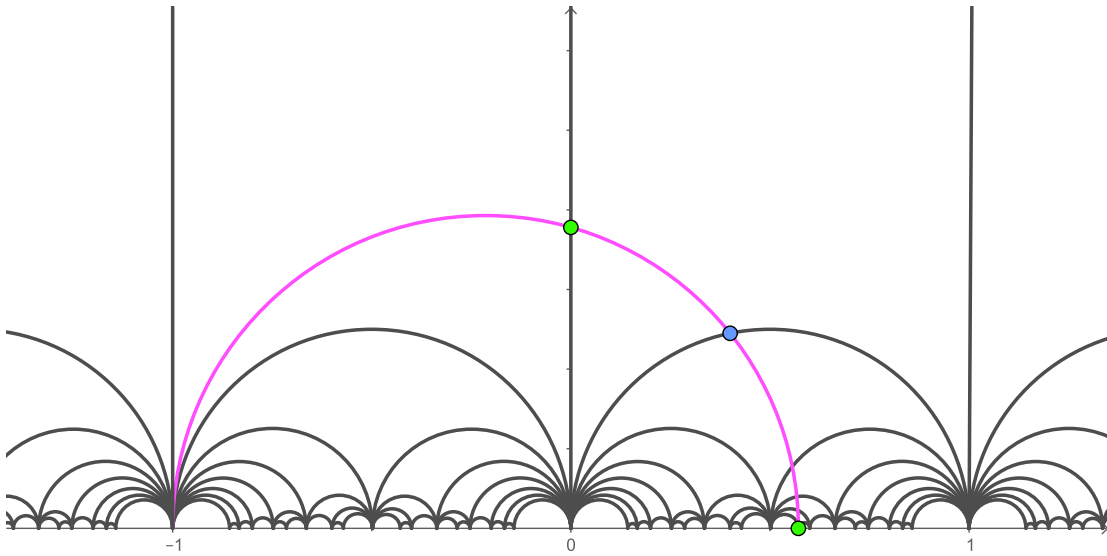


Figura B.1: Geodésica que une un punto del eje imaginario con $\frac{4}{7}$. Marcamos en verde claro los puntos $z \in \mathbb{R}$ y $x \in \mathbb{R}$ y en azul el punto z_1 .

Tomamos $a_0 = 0$ porque no se produce ningún corte por la izquierda en primer lugar. Después aplicamos la inversión de signo opuesto H y obtenemos la curva mostrada en la figura B.2. Recordemos que para calcular a_1 hay que contar el número de cortes por la derecha desde $H(z)$ hasta $H(z_1)$ y que $H(\frac{p}{q}) < 0$.

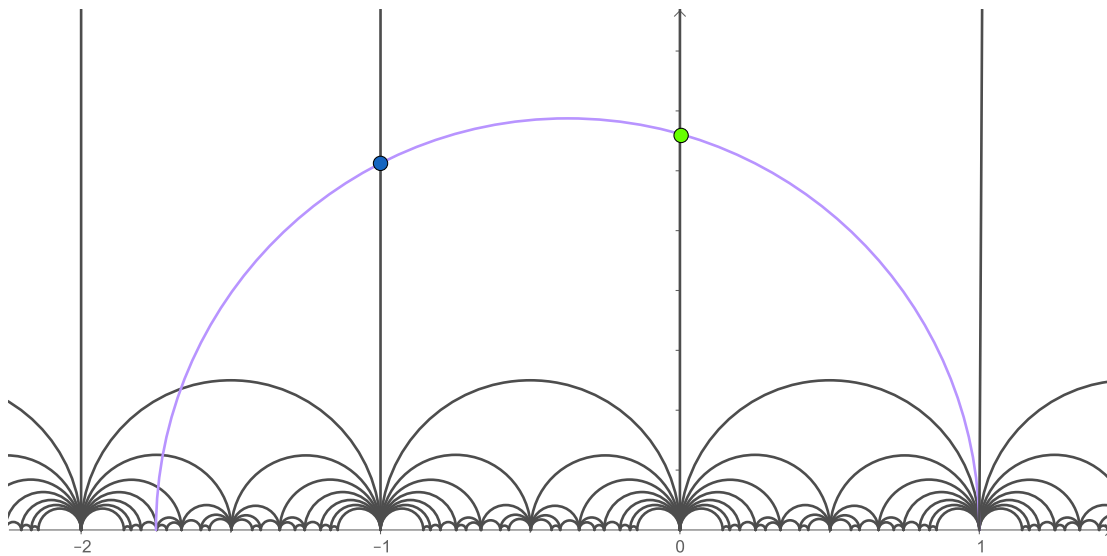


Figura B.2: Transformada por H de la geodésica que une un punto del eje imaginario con $\frac{4}{7}$. En verde claro tenemos $H(z)$ y en azul $H(z_1)$.

En este caso, la geodésica tiene un único corte por la derecha desde el punto de intersección con el eje imaginario y después empiezan los cortes por la izquierda, luego marcamos el punto de intersección de la geodésica con la recta $\{x = -1\}$. Como consecuencia tomamos $a_1 = 1$. Ahora, utilizamos la traslación a_1 unidades hacia la derecha, con lo que el punto de intersección de $H(\gamma)$ con $\{x = -1\}$ pasa a estar en el eje \mathbb{I} . Mostramos esta transformación en B.3.

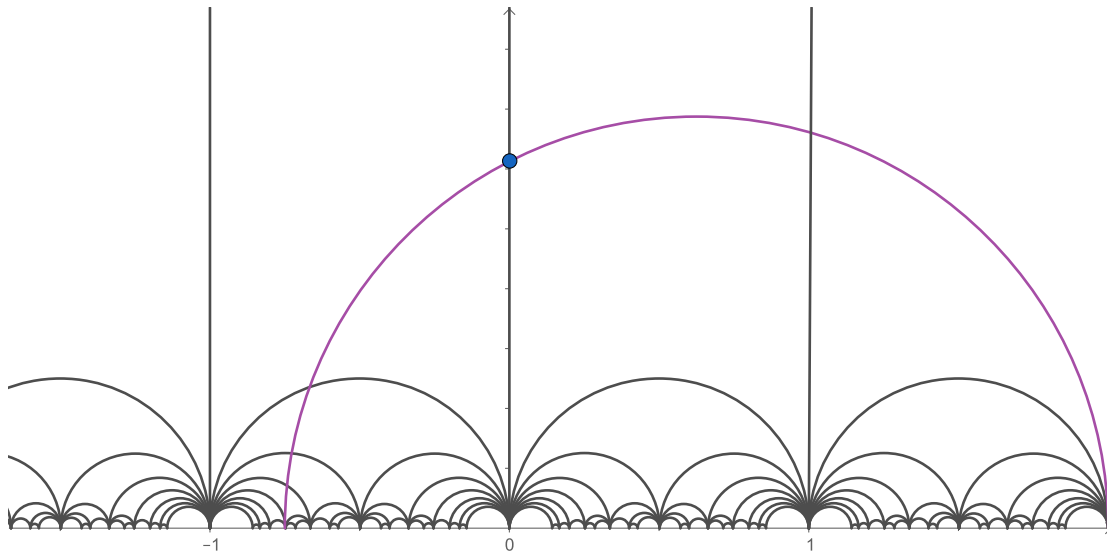


Figura B.3: Transformada por T de la geodésica $H(\gamma)$. En azul, tenemos el punto $TH(z_1)$.

Ahora aplicando de nuevo H obtenemos la geodésica presentada en la figura B.4. Veamos los cortes por la izquierda desde el punto de intersección de la recta \mathbb{I} con la geodésica.

Encontramos únicamente un corte por la izquierda antes de que se produzca por la derecha, con lo que deducimos que $a_2 = 1$.

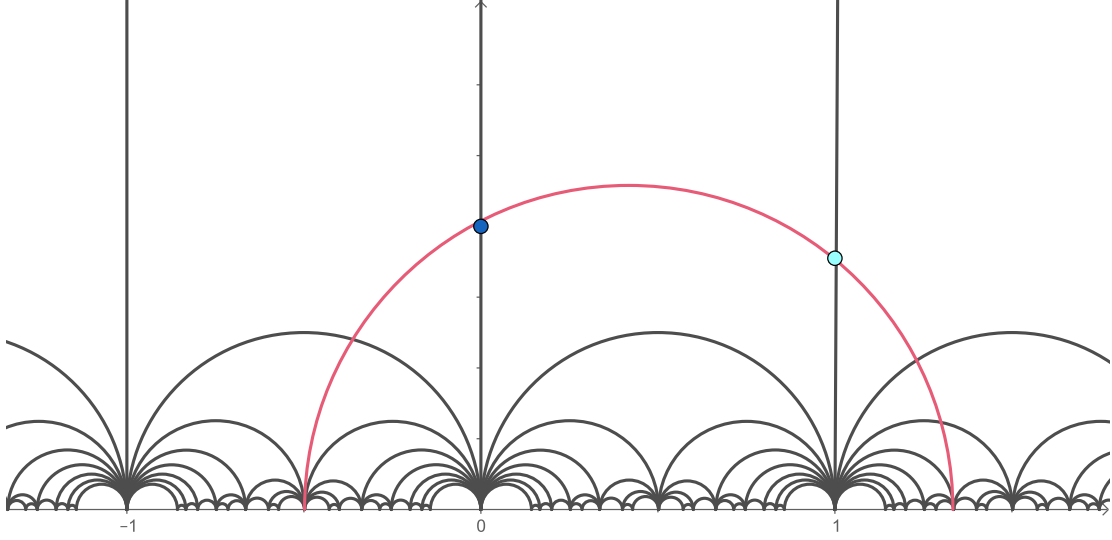


Figura B.4: Transformada por H de la geodésica $TH(\gamma)$. En azul tenemos el punto $HTH(z_1)$ y en azul claro el punto $HTH(z_2)$.

Aplicamos la traslación hacia la izquierda T^{-1} , obteniendo la geodésica $T^{-1}HTH(\gamma)$ mostrada en la figura B.5.

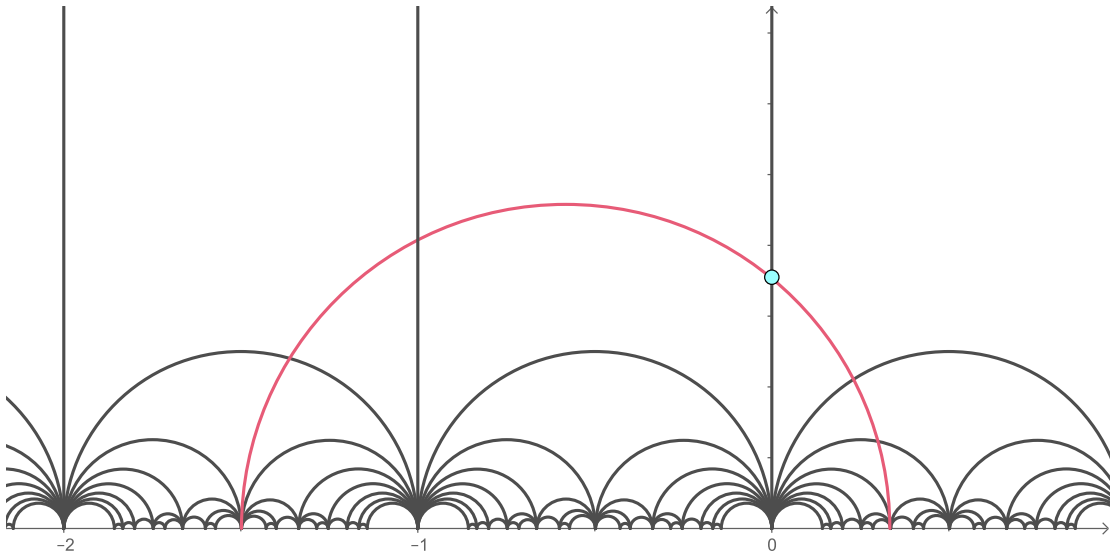


Figura B.5: Transformada por T^{-1} de la geodésica $HTH(\gamma)$. En azul claro tenemos $T^{-1}HTH(z_2)$.

Finalmente aplicamos la inversión H y la geodésica que obtenemos, en la figura B.6, tiene -3 como extremo izquierdo, con lo que se producen dos cortes con las teselas por la derecha y uno ambiguo. Es decir, podemos elegir $a_3 = 2$ y $a_4 = 1$ ó $a_3 = 3$.

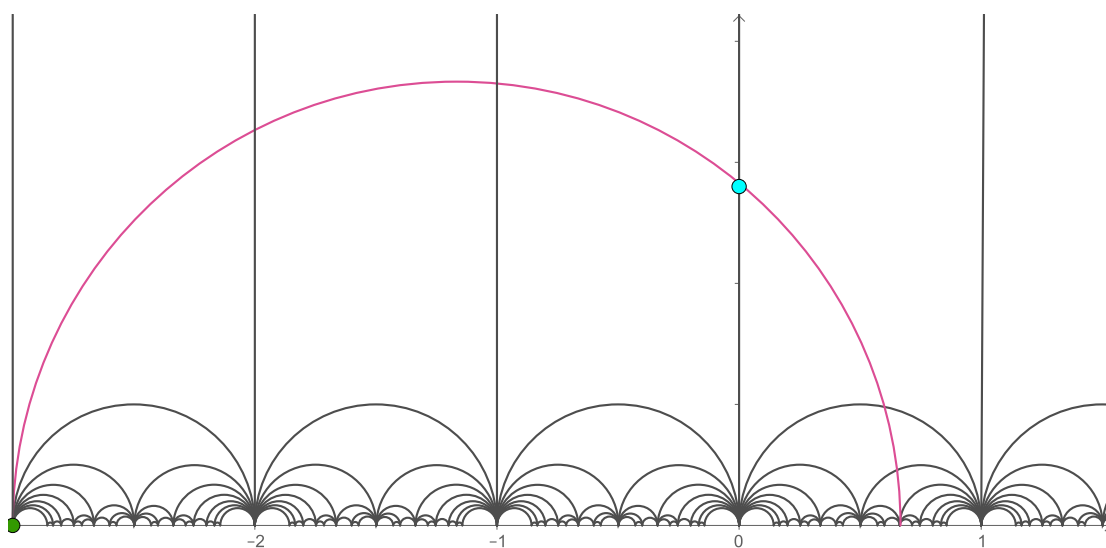


Figura B.6: Transformada por H de la geodésica $T^{-1}HTH(\gamma)$. En azul claro tenemos $HT^{-1}HTH(z_2)$ y en verde $HT^{-1}HTH(z_3) = (-3, 0)$.

Con lo que finalmente, eligiendo la segunda opción, obtenemos la expresión $[a_0; a_1, a_2, a_3] = [0; 1, 1, 3]$, lo mismo que se obtuvo en el ejemplo 4.19.